SIMPLICES INFINITOS EN RETICULOS

por

JOSE M.ª BRUNAT

En las «Notas sobre la teoría de la dimensión para retículos» (*Gaceta Matemática*, números 1 y 2 de 1976) se amplió el concepto de longitud de un módulo al de longitud de un retículo y el de base finita de un espacio vectorial al de símplice finito de ciertos retículos. Numerosas definiciones y teoremas, referentes al retículo de submódulos de un módulo dado, admiten generalizaciones semejantes: módulos simples y semisimples, finito generados, noetherianos y artinianos, Teorema de Jordan-Hölder, etc. Todo esto puede verse en [1]. Aquí vamos únicamente a demostrar que el análogo al Teorema de la Base de espacios vectoriales es válido en un retículo modular atómico y complementado.

En lo sucesivo supondremos que L es un retículo completo, es decir, que para cada parte $S \subset L$ existen supremo $\vee\{s; s \in S\}$ e ínfimo $\wedge\{s; s \in S\}$. En particular existen máximo, 1, y mínimo, 0, que son, respectivamente, el supremo y el ínfimo de L.

COMPACTOS.

Un subconjunto $D \subset L$ es dirigido si para cada dos elementos $d_1, d_2 \in D$ existe un $d \in D$, tal que $d_1 \leqslant d$ y $d_2 \leqslant d$.

L es superiormente continuo si para cada subconjunto $D \subset L$ dirigido y cada $a \in L$ se verifica

$$(\vee\{d; d \in D\}) \wedge a = \vee\{d \wedge a; d \in D\}$$

Dualmente se define la continuidad inferior.

Un elemento $c \in L$ es compacto si, siendo $D \subset L$ dirigido, $c \leqslant \vee\{d; d \in D\}$ implica que existe un $d \in D$ con $c \leqslant d$. En retículos superiormente continuos esta definición puede precisarse:

Proposición 1.

Sea L superiormente continuo. Entonces $c \in L$ es compacto si y sólo si para cada $D \subset L$ dirigido, tal que $c = \vee\{d; d \in D\}$ existe un $d \in D$ con $c = d$.

Demostración.

Si $c = \vee\{d;\ d \in D\}$ es compacto, existe $d \in D$ con $c \leqslant d$. Por ser c el supremo de D también $c \geqslant d$. Así, $c = d$.

Recíprocamente, si se cumple la condición y $c \leqslant \vee\{d;\ d \in D\}$, por ser L superiormente continuo se cumple

$$c = (\vee\{d;\ d \in D\}) \wedge c = \vee\{d \wedge c;\ d \in D\}$$

El conjunto $\{d \wedge c;\ d \in D\}$ es dirigido, luego existe un $d \in D$ con $c = d \wedge c$. Entonces, $c \leqslant d$ y c es compacto. □

Proposición 2.

Si L es superiormente continuo, cada átomo es compacto.

Demostración.

Sean $a \in L$ un átomo, $D \subset L$ dirigido y $a \leqslant \vee\{d;\ d \in D\}$. Si a no es compacto para cada $d \in D$ es $a \nleqslant d$, luego $a \wedge d < a$ y, por ser a átomo, $a \wedge d = 0$. Entonces

$$a = a \wedge (\vee\{d;\ d \in D\}) = \vee\{a \wedge d;\ d \in D\} = 0$$

lo que es contradictorio. □

SÍMPLICES INFINITOS.

Una parte $G \subset L$ es un sistema de generadores si su supremo es 1.

Una parte $I \subset L$ es independiente si para cada conjunto finito $F \subset I$, $a \in I - F$ implica $a \nleqslant \vee\{f;\ f \in F\}$.

Un símplice de L es un sistema de generadores independiente formado por átomos.

Usaremos repetidamente la siguiente observación: Si $A \subset L$ y designamos por D(A) al conjunto de los supremos de las partes finitas de A, entonces D(A) es dirigido y su supremo coincide con el de A.

Teorema 1.

Sea L un retículo superiormente continuo.

Entonces:

(*a*) Si G es un sistema de generadores compactos y S es un símplice infinito, se verifica GardG $\geqslant$ CardS.

(*b*) Si L tiene un símplice infinito, todos los símplices tienen el mismo cardinal.

Demostración.

(*a*) Para cada $x \in G$ tenemos

$$x \leqslant 1 = V\{s;\ s \in S\} = V\{d;\ d \in D(S)\}$$

Por ser x compacto y D(S) dirigido, existe un $d(x) = s_{x1} \vee \ldots \vee s_{x_n} \in$ $\in D(S)$ con $x \leqslant d(x)$. Pongamos

$$S(x) = \{s_{x1}, \ldots, s_{x_n}\} \text{ y } C = V\{S(x);\ x \in G\}$$

Desde luego, $C \subset S$. Si existiera $s \in S - C$, s es compacto por la Proposición 2, y de la desigualdad

$$s \leqslant 1 = V\{g;\ g \in G\} = V\{d;\ d \in D(G)\}$$

se deduce que existe $d(s) = g_{s1} \vee \ldots \vee g_{s_n}$ con $s \leqslant d(s)$.

El conjunto $F = U\{S(g_i);\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$ es finito y está contenido en C. Puesto que $s \notin C$ es $s \notin F$; sin embargo, $s \leqslant d(s) = d(g_{s1}) \vee \ldots \vee d(g_{sm}) \leqslant$ $\leqslant V\{f;\ f \in F\}$, lo que contradice el hecho de ser S independiente. Así, también $S \subset C$ y tenemos $C = S$. Como S es infinito, C es infinito y también G, cumpliéndose $\mathrm{Card}G \geqslant \mathrm{Card}C = \mathrm{Card}S$.

(b) Sea S un símplice infinito y S_1 un símplice. Tomando $G = S_1$, en el apartado anterior, resulta $\mathrm{Card}S_1 \geqslant \mathrm{Card}S$. S_1 es, pues, también infinito y por el mismo razonamiento $\mathrm{Card}S \geqslant \mathrm{Card}S_1$. En definitiva, $\mathrm{Card}S = \mathrm{Card}S_1$. □

Teorema 2.

Sea L modular atómico y complementado. Entonces.

(a) Si I es una parte independiente formada por átomos, existe un símplice S de L con $I \subset S$.

(b) Si $L \neq O$ existe un símplice.

Demostración.

(a) Ordenemos la familia $J = \{S \subset L;\ I \subset S$ y S es independiente formado por átomos$\}$ por inclusión. Desde luego $J \neq \emptyset$, ya que $I \in J$. Si $\mathfrak{T} \subset J$ es una parte totalmente ordenada, el conjunto $R = U\{T;\ T \in \mathfrak{T}\}$ pertenece a J: Si F es un subconjunto finito de R y $a \in R - F$, por ser $\mathfrak{T}$ totalmente ordenado, existe un $T \in \mathfrak{T}$ tal que $F \subset T$ y $a \in T$. Como T es independiente, $a \nleqslant V\{f;\ f \in F\}$ y R es independiente. Es claro, entonces, que R es cota superior de $\mathfrak{T}$ y, por tanto, el orden de J es inductivo. En virtud del Lema de Zorn existe un elemento maximal S.

Para ver que S es el símplice buscado bastará demostrar que es un sistema de generadores. Si $V\{s;\ s \in S\} < 1$, existe (como se demostró en lema del artículo citado al principio) un átomo a tal que $a < V\{s;\ s \in S\}$. Entonces S está estrictamente incluido en $S \cup \{a\} \in J$, lo que contradice la maximalidad de S. Tenemos, pues, $V\{s;\ s \in S\} = 1$ y S es un sistema de generadores.

(b) Si $L \neq 0$ existe un átomo $a \in L$. Basta tomar $I = \{a\}$ en el punto anterior para obtener el resultado. □

Aplicación.

Las demostraciones anteriores se han obtenido mediante las dadas en [2] y usando las equivalencias que enunciamos en la siguiente proposición, cuya demostración, ahora, es inmediata.

Proposición 3.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y V(E) el retículo de sus subespacios vectoriales. Entonces:

(a) $\{x_i;\ i \in I\}$ es un sistema de generadores de E si y sólo si $\}Kx_i;\ i \in I\}$ es un sistema de generadores de V(E).

(b) $\{x_i;\ i \in I\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes si y sólo si $\{Kx_i;\ i \in I\}$ es una parte independiente de V(E).

(c) $\{x_i;\ i \in I\}$ es una base de E si y sólo si $\{Kx_i;\ i \in I\}$ es un símplice de V(E).

Los teoremas 1 y 2 y las anteriores equivalencias implican los siguientes resultados:

Teorema 3.

Sea E un espacio vectorial. Entonces:

(a) Si E tiene una base infinita, todas las bases tienen el mismo cardinal.

(b) Si I es un conjunto de vectores linealmente independientes, existe una base que lo contiene.

(c) Todo espacio vectorial tiene una base.

Bibliografía.

1. Modular Lattices. Ring of Quotiens, Chapter III Bo Stenström Die Grundleheren der mathematischen... Band 217. Springer-Verlag

2. Espacios vectoriales. Capítulo III de «Geometría Básica», de P. Abellanas. Editorial Romo.

3. Retículos. Complementación en retículos y Algebras de Boole Capítulo II del «Curso de Probabilidades», de F. de Sales. Facultad de matemáticas de Barcelona.