INMERSION DE UNA GEOMETRIA METRICA DE CUALQUIER DIMENSION EN UNA GEOMETRIA PROYECTIVA

por

H. R. Friedlein y E. Saez S.

I. INTRODUCCION

Todo plano métrico es sumergible en un plano proyectivo usando snail maps [4]. Ewald, en [3], generaliza la inmersión en cualquier dimensión, demostrando que la geometría métrica es de incidencia en el sentido de Wyler, y según [7], toda geometría de incidencia, con dimensión mayor que tres, es una geometría proyectiva. Si la dimensión es tres, el hecho se puede demostrar con [1].

Las desventajas de realizar la inmersión, apoyándose en [7], se deben a que se utilizan métodos fuera de la geometría métrica. Por otra parte, uno de los autores, en [5], hace la inmersión en cualquier dimensión utilizando snail maps generalizados en geometrías métricas.

La idea de este trabajo surgió como una tercera posibilidad de sumergir una geometría métrica, en cualquier dimensión, en una proyectiva, sin usar métodos fuera de la geometría y sin usar snail maps generalizados.

Como en una geometría métrica elíptica, los puntos y las series de puntos coinciden con los puntos y las rectas de la geometría métrica, entonces es inmediato que los puntos y rectas de una geometría métrica elíptica constituyen una geometría proyectiva.

Para encontrar la geometría proyectiva, en el caso no elíptico, es necesario extender el conjunto de los puntos y el de las rectas, introduciendo los llamados elementos ideales. Como definición de puntos ideales, se usa la clasificación de haces de [5].

Importante para el trabajo resulta el teorema 2.10-2.12. Con estos resultados es posible reducir la demostración de la inmersión de cualquier geometría métrica al caso de la inmersión de planos métricos en proyectivos [4].

1. Definiciones y resultados conocidos

Sea $\overline{B}$ un grupo con generador $\overline{P} \cup \overline{G}$ que contiene solamente elementos involutorios. Los elementos de $\overline{P}$ se llaman puntos (se designan por letras mayúsculas, como P, Q, R, . . . , etc.) y los de $\overline{G}$, rectas (se designan por letras minúsculas, como a, b, c, . . . , etc.). Si α, β son elementos involutorios distintos de $\overline{B}$, tales que $\alpha\beta = \beta\alpha$, entonces se escribe α/β. Si $\alpha = P$ y $\beta = a$, tales que a/P, se dice que P se encuentra sobre la recta a, o bien, que la recta a pasa por el punto P. Si el grupo $\overline{B}$, con generador $\overline{P} \cup \overline{G}$ satisface los axiomas de [3], entonces $(\overline{B}, \overline{P} \cup \overline{G})$ se llama geometría métrica y $\overline{B}$, el grupo de movimientos de la geometría métrica.

Uno de los resultados importantes de [3] es que dos puntos diferentes, P, Q, definen únicamente una recta que pasa por dichos puntos, la cual se designa por (P, Q). El recíproco es falso (ver [6]). El producto P(P, Q) se llama *hiperplano.*

Sean $P, Q \in \overline{P}$ con $P \neq Q$. El conjunto de puntos $<P, Q> \; : = \{P\} \cup \{X/(P, Q) = (P, X)\}$ se llama *serie de puntos.* En [6] se explica la diferencia entre recta y serie de puntos.

Sean P, A, B puntos que no se encuentran en una misma serie de puntos. El conjunto de puntos $(P, A, B) : = \{X/(P, A)\,(P, B)\,(P, X) = (P, R),\ R \in \overline{P}\} \cup \{P\}$ se llama *campo de puntos.* El producto P(PQ) (PR) con (P, Q)/(P, R) se llama *plano métrico.*

Siempre se puede encontrar únicamente para un campo de puntos un plano que contenga todos los puntos del campo de puntos (la incidencia entre plano y punto es definida análogamente por la relación I).

Si en $(\overline{B}, \overline{P} \cup \overline{G})$ existen puntos P, Q con P/Q y PQ = (P, Q), entonces la geometría métrica se dice *elíptica.*

La geometría métrica $(\overline{B}, \overline{P} \cup \overline{G})$ se dice *euclidiana* si se satisface el siguiente axioma: Sea (P, Q)/(P, R), entonces existe un punto S tal que (P, Q)/(Q, S)/(S, R)/(P, R)».

Según [3], en una geometría métrica no elíptica, los campos de puntos coinciden con los planos métricos, y las rectas, con la series de puntos. Los campos de puntos se designan por letras, α, β, μ, . . . , etc.

En [3] se puede encontrar la demostración de que los puntos y las series de puntos, en una geometría métrica elíptica, forman una geometría proyectiva y la inmersión de planos métricos en proyectivos se encuentra en [2]. Por esta razón, el presente trabajo contempla geometrías métricas que no son ni planos métricos ni geometrías métricas elípticas. Por último, se advierte que se usan los axiomas de [8] y [7] para la geometría proyectiva.

La meta siguiente, es construir a partir de la geometría métrica una geometría proyectiva en la cual ésta sea inmersible.

2. Inmersión.

2.1. *Definición.*

Sea un conjunto de rectas de la geometría no elíptica con la propiedad (*): «Por cada punto A de la geometría existe g en el conjunto, tal que A$\mathrm{I}g$ y dos rectas cualesquiera del conjunto se encuentran siempre en un plano métrico.» Un conjunto de rectas que tiene la propiedad (*) se llama:

a) *Haz de 1.ª clase,* si dos rectas diferentes del conjunto siempre tienen un punto en común.
b) *Haz de 2.ª clase,* si dos rectas diferentes del conjunto tienen siempre una recta ortogonal en común.
c) *Haz de 3.ª clase,* si dos rectas diferentes del conjunto no tienen punto ni recta ortogonal en común.

2.2. *Definición.*

Se llama *punto ideal* a cualquier tipo de haz y se designan por: (A), (B), (C)...

En [5] se da la siguiente clasificación de haces.

2.3. *Teorema* (clasificación de haces).

Sea $\overline{a}$ un conjunto de rectas que tiene la propiedad (*), entonces:

i) Si existen a, $b \in \overline{a}$ con $a \neq b$ y existe P, tal que P$/a$, b; entonces, $\overline{a}$ es un haz de 1.ª clase y todas las rectas pasan por P.
ii) Si existen a, $b \in \overline{a}$ con $a \neq b$ y exite g, tal que, g/a, b; entonces $\overline{a}$ es un haz de 2.ª clase.
iii) Si existen a, $b \in \overline{a}$ con $a \neq b$, tal que no existe P con P$/a$, b, y no existe g, tal que g/a, b; entonces $\overline{a}$ es un haz de 3.ª clase.

Los haces de 1.ª clase son los puntos de la geometría, por esto, también se designan por letras A, B, C, D, ...

En [5] también se encuentra el siguiente resultado:

2.4. *Teorema.*

Sea (A) un haz de 2.ª clase, entonces existe un hiperplano O · G, tal que $h \in$ (A) sí y sólo si O · G = O′ · h, O · G es llamado ***hiperplano soporte*** de (A) y se tiene: (A) = $\{h/\mathrm{O} \mid \mathrm{G} = \mathrm{O}' \cdot h\}$, (A) se desgina por (O · G),

2.5. *Definición.*

Sea $g \in \overline{\mathrm{G}}$, entonces el conjunto $(g) := \{(\mathrm{P})/g \in (\mathrm{P})\}$ es llamado *recta ideal propia.*

En la construcción de planos métricos, realizada por F. Bachmann. es fundamental el rol de ciertos mapeos llamados en su libro [2] «Halbdrehungen», y en inglés (ver [4]), «Snail maps». En este trabajo se usa el nombre en inglés. La definición y la propiedades de los snail maps se pueden encontrar en [2], [4].

2.6. *Definición.*

Sea (g) una recta ideal propia en un plano métrico α y * un snail map en α, con centro $o \in \alpha$, entonces el conjunto: $(1) = \{(P)/(P)^* = (A)$, con $g \in (A)\}$ es llamado *recta ideal.*

2.7. *Definición.*

El conjunto: (g_∞): $= \{(P_i)/(P_i)$ haces de 2.ª clase $(P_i) = (o \cdot g_i)$, $i \in I$ y $g_i\ g_j\ g_k$ es una recta g/o para todo $i, j, k \in I\}$, es llamado *recta ideal infinita* respecto del punto O.

2.8. *Definición.*

Sean $g_1 \neq g_2$ con $o/g_1\ g_2$, entonces el conjunto: $(\alpha) := \{(P)/$existe h con $h \cdot g_1 \cdot g_2 = 1$. $O/1$ y $h \in (P)\}$ es llamado *plano ideal propio.*

Es claro que, un plano ideal propio (α) es inducido por un plano métrico α y según [2], los planos ideales propios son planos proyectivos.

2.9. *Definición* (ver Wyler [7]).

Sean $(A) \neq (B)$, entonces el conjunto: $(g)_{(A)\neq(B)} := \{(P)/$ para todo (α) plano ideal propio con $(A) \in (\alpha)$ y $(B) \in (A)$, se tiene $(P) \in (\alpha)\}$, es llamado *recta ideal según Wyler.*

2.10. *Teorema.*

Sean (A), (B) puntos de (g) y $(g) \neq (g_\infty)$, entonces (g) es una recta ideal según Wyler, si y sólo si para todo (α) plano ideal propio con (A), $(B) \in (\alpha)$ existe * en α tal que $(g)^* = (1)$ y (1) es una recta ideal propia.

Demostración (suficiencia).

Primero se demuestra que existen (α_1), (α_2) con $(\alpha_1) \neq (\alpha_2)$ (A), $(B) \in (\alpha_1)$, (α_2) y $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) = (g)$.

Sea $P \in \overline{P}$, entonces existen $a \neq b$ con $a \in (A)$, $b \in (B)$ y $P/a, b$ por 2.1.

De 2.8 existe (α_1) plano ideal propio determinado por a, b con (A), $(B) \in (\alpha_1)$, pero, por hipótesis, existe * en α_1 con $(g)^* = (1)$ (recta ideal propia en (α_1)). Sea $Q\ \Gamma\ (\alpha_1)$, entonces, por el mismo razonamiento anterior, existe (α_2) plano ideal propio diferente de (α_1) con (A), $(B) \in (\alpha_2)$.

Luego (A), (B) $\in (\alpha_1), (\alpha_2)$, además, $(g) \subseteq (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$, ya que: si (R) $\in (g)$ y (R) $\neq$ (A), (B) se tiene que $(R)^* = R, (A)^* = A, (B)^* = B$ y A, R, B/(1), donde * es en α_1 y (1) es una recta ideal propia. Tomando imágenes inversas se concluye que (A), (R), (B) $\in (\alpha_1)$. Análogamente, (A), (R), (B) $\in$ $\in (\alpha_2)$, luego $(g) \subseteq (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$.

Falta demostrar que $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) \subseteq (g)$. Sea (R) $\neq$ (A), (B) con (R) $\notin (g)$ y (R) $\in (\alpha_1) \cap (\alpha_2)$, entonces existe $(m) \neq (g)$ con (R), (A) $\in (m)$, además, existe $(n) \neq (m)$, tal que (R), (B) $\in (n)$. Por lo tanto, (g), (m) y (n) determinan un único plano ideal propio (γ) con (A), (B), (R) $\in (\gamma)$, por ser éste proyectivo. Luego $(\alpha_1) = (\alpha_2)$ y esto es una contradicción, pues se tenía $(\alpha_1) \neq (\alpha_2)$. Es entonces $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) \subseteq (g)$ y, en consecuencia, $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) = (g)$. (Condición necesaria.) Obviamente se tiene que si (g) contiene un punto ideal propio, entonces (g) es una recta ideal propia. Supongamos ahora que (g) no contiene ningún punto ideal propio y que sobre (g) existen tres puntos ideales, (A), (B), (C), y que en uno de los planos (α) que contiene (g) hay un snail map *, tal que $(A)^*$, $(B)^*$, $(C)^*$ son puntos ideales no colineales. Entonces (A), (B), (C) son no colineales y, en consecuencia, todos los planos que se intersectan en (g) son iguales, es decir, la geometría dada es un plano métrico hecho que contradice el contexto en el cual se suponen las hipótesis.

2.11. *Teorema*

Sea (g_∞) recta ideal infinita respecto del punto O en una geometría métrica no elíptica y no euclidiana, entonces: $(g_\infty)^* = (1)$, donde (1) es una recta ideal propia y * tiene centro $O' \neq O$. (Ver [4].) Como consecuencia de 2.2 a 2.11, los diferentes tipos de rectas ideales se reducen a rectas según Wyler.

Si la geometría es euclidiana, entonces el teorema 2.11 no es válido.

2.12. *Teorema.*

Sea (g_∞) en una geometría métrica euclidiana, entonces (g_∞) es una recta según Wyler.

Demostración.

Para demostrar que existen (α_1), (α_2) planos ideales propios diferentes con $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) = (g_\infty)$. Sean $(0 \cdot g_1)$, $(0 \cdot g_2)$, $(0 \cdot g_3) \in (g_\infty)$, luego por 2.7 se tiene que $g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 = h$, con $h/0$ y, en consecuencia, g_1, g_2, g_3 determinan un plano propio (α_1) con $(0 \cdot g_1)$, $(0 \cdot g_2)$, $(0 \cdot g_3) \in (\alpha_1)$. Sea $0' \notin \alpha_1$, tal que $0'/g'_i$ y $g'_i \in (0 \cdot g_i)$ con $i = 1, 2, 3$, entonces g'_1, g'_2, g'_3 determinan un plano propio $(\alpha_2) \neq (\alpha_1)$ y $(0' \cdot g'_1)$, $(0' \cdot g'_2)$, $(0' \cdot g'_3) \in (\alpha_2)$, pero $(0' \cdot g'_i) = (0 \cdot g_i)$ con $i = 1, 2, 3$, luego $(g_\infty) = (\alpha_1) \cup (\alpha_2)$.

2.13. *Teorema.*

Los puntos y rectas ideales, en una geometría métrica no elíptica, constituyen una geometría proyectiva.

Demostración.

Verificación de G.P.1 de [7]: Si (A) $\neq$ (B), entonces existe una única (g), tal que (A), (B) $\in (g)$.

a) Si (A) es de primera clase, entonces si (B) es otro punto ideal diferente de (A), existe una única (g) recta ideal propia con (A), (B) $\in (g)$. Esto es consecuencia de 2.9.

b) Sean (A), (B) ambos no de primera clase en una geometría no euclidiana, entonces existe (α) plano ideal propio determinado por 0, (A), (B). Análogamente, si consideramos $0' \neq 0$ con $0' \notin (\alpha)$, entonces $0'$, (A), (B) determinan (α') plano propio diferente de (α). Luego por 2.10 existe una única (g), tal que (A), (B) $\in (g) = (\alpha) \cap (\alpha')$.

c) Si la geometría es euclidiana, sean (A) $\neq$ (B) tal que:

1. (A) $\notin (g_\infty)$ y (B) $\in (g_\infty)$. Sean (α) tal que $(g_\infty) \subseteq (\alpha)$, (A) $\in (\alpha)$ y * snail map en α con centro 0. Entonces: $(B)^* = (C)$ con (C) $\in$ $\in (g_\infty)$ y $(A)^* = D$, luego existe una única (1) recta ideal propia con D/(1), (C) $\in$ (1) y como * es un mapeo 1-1, entonces existe una única (m), tal que (A), (B) $\in (m)$ y $(m)^* = (1)$.
2. (A), (B) $\in (g_\infty)$, entonces por 2.12 (g_∞) es única.

Verificación de G.P.2 de [7]: Sean (A), (B), (C), (D), (E) puntos ideales diferentes, tales que no se encuentran en una misma recta y (A), (B), (C) $\in (g)$ y (C), (D), (E) $\in (a)$. Además, sean (d), (1) tales que (B), (D) $\in (d)$ y (A), (E) $\in$ (1). Entonces existe (F), tal que (F) $\in (d)$. (1).

Caso I.

Sean (A), (B), (C), (D) (E) puntos ideales en un mismo plano propio. Sea (C) $\overline{P}$, entonces las rectas propias (a), (g) con (C) $\in (a)$, (g) determinan un único plano ideal propio (α), tal que (A), (B), (C). (D), (E) $\in (\alpha)$. Luego existe (F) con (F) $\in (d)$, (1).

La demostración es análoga si uno de los otros puntos pertenece a $\overline{P}$, por la configuración dada en la hipótesis aplicando 2.8.

Caso II.

Sean (A), (B), (C), (D), (E) puntos ideales diferentes, tales que no se encuentran en un mismo plano propio. Sea $0 \in \overline{P}$, entonces 0, (A), (B) y 0, (D), (E) determinan planos propios diferentes (β) y (γ), respectivamente.

Por [3], 0, (β), (γ) originan un 3-espacio K (definición, ver [3]). Por otra parte, O, (B), (D) y 0, (A), (E) determinan planos propios diferentes (α_1) y (α_2), respectivamente. En forma análoga, 0, (α_1), (α_2) originan el 3-espacio K. Por [3] en K se tiene que $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) = (r)$, recta propia y existe (H) en el 3-espacio K con (H) $\in (r)$, (1), (d), pues en un 3-espacio es válido el Veblen Young.

Sea $0' \in \overline{\mathrm{P}}$, con $0' \neq 0$. Por el mismo razonamiento anterior existen (β'), (γ'), (α'_1), (α'_2), tales que $0'$, (β'), (γ') y $0'$, (α'_1), (α'_2) determinan un 3-espacios K'. Además $(\alpha_1) \cap (\alpha'_2) = (r')$ recta propia y $(\mathrm{H}') \in (r')$, (1) (d), es decir, (H), (H') $\in$ (1), (d), donde $(1) \neq (d)$, entonces $(\mathrm{H}) = (\mathrm{H}')$. Sea (m) tal que 0, $0'/(m)$, entonces (m) y (r) determinan un plano propio (δ) y como $0'$, (H) $\in (\delta)$; está en (δ) (r') y en consecuencia (r) y (r') están ambas en (δ).

Haciendo recorrer 0 por todos los puntos de la geometría, se obtiene un conjunto (F) de rectas propias en donde cada par de rectas están en un plano propio, luego existe (F), punto ideal, tal que (F) $\in (d)$, (1).

Verificación de G.P.3. de [7].

a) Si (g) es una recta ideal, entonces existen por lo menos (A), (B), tal que (A), (B) $\in (g)$, con $(\mathrm{A}) \neq (\mathrm{B})$. Sea (g) recta ideal, entonces $\exists$ (α) plano propio tal que $(g) \subset (a)$. Si $*$ es un snail map en α, tal que $(g)\,* = (m)$, con $(m) \neq (g)$ y (m) recta propia en (α) entonces existen $(\mathrm{C}) \neq (\mathrm{D}) \in (m)$; luego, como los snail maps son inyectivos, se tiene que existen (A), (B) $\in (g)$ con $(\mathrm{A})\,* = (\mathrm{C})$ y $(\mathrm{B})\,* = (\mathrm{D})$. Si $(g)\,* = (g)$, entonces en α existe 0 y (r) recta propia con $0 \in (r)$ y $(\mathrm{A}) \in (r)$ para algún $(\mathrm{A}) \in (g)$. Si no. se eilge otro punto $0' \neq 0$, tal que ocurra el hecho anterior. Sea $*$ en α con centro 0, entonces $(r)^* = (r')$, recta propia, tal que $0 \in (r')$ y $(\mathrm{A})\,* = (\mathrm{B})$, con $(\mathrm{B}) \in (g)$. En consecuencia existen (A), (B) diferentes, tales que (A), (B) $\in (g)$.

b) Existen (A), (B), (C) puntos ideales diferentes, tales que no están en una misma recta (g).

Demostración.

Existen A, B, C diferentes en $\overline{\mathrm{P}}$, tales que no están en una misma recta g, luego existen (A), (B), (C) puntos ideales diferentes, tales que no están en una misma recta propia (g). Además, sabemos que no existe ninguna recta ideal no propia que pase por (A), (B), (C), pues, éstas no tienen puntos ideales de primera clase.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ahrens, J.: «Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff», *Math. Zeitschr*, **71**, 154-185 (1959).

[2] BACHMANN, F.: «Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungs begriff», 2. Aufl. Berlín (1973).

[3] EWALD, G.: «Spiegelungsgeometrische Kennzeichnung euklidischer und nichteuklidischer Raume beliebiger Dimension», *Math abh. Sem.*, Hamburg, **41** (1974).

[4] EWALD, G.: «Geometry: An Introduction».

[5] FRIEDLEIN, H. R.: «Einbettung beliebig dimensionaler metrischer Raume mit Hilfe von Halbdrehungen».

[6] MORRAS, R.: «Geometría Elíptica de un Espacio de Hilbert de cualquiera dimensión».

[7] WYLER, O.: «Incidence Geometry», *Duke Math.*, J., **20**, 601-610 (1953).

[8] VEBLEN YOUNG: «Projective Geometry», Boston, 1946.