GENERALIZACION DE SNAIL MAPS A GEOMETRIAS METRICAS DE CUALQUIER DIMENSION E INMERSION DE ESTAS GEOMETRIAS

por

H. R. Friedlein

1. Introducción.

Una geometría métrica con dimensión finita se puede describir por ciertos grupos que son generados por elementos involutorios ([1], [2], [4]). En las geometrías métricas pertenecientes a estos grupos, los generadores determinan reflexiones en hiperplanos.

Los puntos y las rectas de la geometría son determinados por ciertos productos finitos de reflexiones en hiperplanos.

Esta idea no sirve para la construcción de una geometría métrica de cualquier dimensión, pues hay que asignar a los puntos y las rectas productos infinitos de elementos del generador. Por esta razón, G. Ewald [3] eligió como generador del grupo que determina la geometría métrica dos conjuntos de elementos involutorios, los cuales, en la geometría métrica, corresponden al conjunto de las reflexiones en rectas y al de las reflexiones en puntos. Este concepto no solamente entrega una construcción más simple para las geometrías métricas, sino que, además, permite la construcción de geometrías métricas de cualquier dimensión.

Uno de los resultados principales es que cada geometría métrica es sumergible en una geometría proyectiva. Este resultado es trivial en el caso de la geometría métrica elíptica, pues ella ya es una geometría proyectiva. Para la inmersión de un plano métrico se necesita el concepto de snail maps. Para la geometría métrica de dimensión tres, Ewald en [3] necesita [1] y para las otras dimensiones [10]. Generalizando el concepto de snail maps a cualquier dimensión se pueden evitar estos desvíos.

En este trabajo haremos esta generalización. Además, definimos en geometrías métricas con dimensión $\geqslant 3$ haces de rectas y extendemos los snail maps al conjunto de los haces. En la última parte del artículo daremos una demostración para la inmersión de geometrías métricas usando snail maps.

2. Snail maps en espacios métricos de cualquier dimensión.

Contemplamos en lo que sigue sólamente espacios métricos no elípticos. Sean O un punto del espacio métrico no elíptico y gO, hO dos hiperplanos por O, entonces:

(1) Dados gO, hO. Para $P^{gh} = P^{g^{O}h^{O}}$ existen rectas g', h' tal que $P^{gh} = P^{g'h'}$ y g', h', $P^{g'h'}$ se encuentran en un mismo plano métrico E, ortogonal a los hiperplanos dados.

Demostración: Consideremos las perpendiculares l_1, l_2 de P a gO, hO, respectivamente. l_1, l_2 se encuentran en un plano métrico E, ortogonal a gO y hO. E corta a gO en la recta s_1 y a hO en la recta s_2; s_1, s_2 pasan por un punto O′. Según los axiomas 5, 6 de [3], existen perpendiculares g', h' de O′ a gO, hO, respectivamente, tal que g'O′ $=$ gO y h'O′ $=$ hO.

Definición 1: Con ^{o} se describe un mapeo del conjunto de los puntos de un espacio en sí mismo, del cual se pide:

1. Para un punto P $\not\mathrm{I}$ gO $\vee$ P $\not\mathrm{I}$ hO, se define la imagen P^o en la siguiente forma: Sobre la recta (P, P^{gh}) se construye la perpendicular k que pasa por O. El punto de intersección de (P, P^{gh}) y k se designa por P^o.
2. Para P I gO, hO; se define $P = P^o$.

Nota: Como para $P \neq P^{gh}$; P, P^{gh} y O determinan un único plano métrico, según [3] siempre existe el punto P^o.
Los axiomas de la geometría métrica implican que las rectas en el caso no elíptico son únicamente determinadas como unión de dos puntos diferentes. Entonces podemos extender el mapeo ^{o} al conjunto de las rectas sobre ellas mismas.

Definición 2: Sea $v = (P, Q)$; entonces $v^o = (P^o, Q^o)$ donde v^o es la imagen de v bajo ^{o}.

(2) *a*) $P \ \mathrm{I} \ a \Rightarrow P^o \ \mathrm{I} \ a^o$.
b) Sea E un plano métrico, entonces $P \ \mathrm{I} \ E \Rightarrow P^o \ \mathrm{I} \ E^o$.

Demostración: *a*) La demostración es una generalización de una demostración en [6]. Sea $a = (A, B)$ y supongamos que $a \not\mathrm{I}$ gO, hO. A^o es el punto medio de A, A^{gh} (comparar [2], pág. 125), entonces la recta $c = a^{ghA^o}$ pasa por A.

Para los puntos P I a, $P \to P^{ghA^o}$ I c. De [2] sigue fácilmente que para todos los puntos P de la recta a se tiene la igualdad $P^{ghA} = P^{M(B,\, B^{ghA^o})}$ si $a \neq c$, donde M designa el punto medio de B y B^{ghA^o}, el cual existe. Sea l la recta que pasa por A^o y es ortogonal al hiperplano $M(B, B^{ghA^o})$. Contemplemos la reflexión en el hiperplano $A^o \cdot l$, entonces:

$$P^{gh} = P^{M(B,\, B^{ghA^o})A^o} = P^{M(B,\, B^{ghA^o})A^o\, ll}$$

Según [3] 8,5 para $M(B, B^{ghA^o})$, A^o l y P, l se pueden encontrar hiperplanos H_1, H_2 tales que $H_1 I P$ y $M(B, B^{ghA^o})$ A^o $l \doteq H_1 H_2$ con H_1, $H_2 \perp l$, entonces se tiene $P^{gh} = P^{H_1 H_2 l} = P^{H_2 l}$. Segun la construcción, H_2 se puede representar por $M'l$ con $M' I l$ y de esto sigue $P^{gh} = P^{lM'l} = P^{M'}$, por otro lado, ésto significa que M es el punto medio de P y P^{gh}, es decir, segun definición 1, M es el punto P^o, y en consecuencia, $a^o = l$. Si $a = c$, entonces $a^{gh} = a^{A^o} = a^H$ donde H es un hiperplano que contiene el punto A^o; a^o es la intersección de H con el plano métrico generado por a y a^{gh}.

b) Según [3], E es determinado por las rectas diferentes u, v que pasan por un punto O′ de E. Ademas. se sabe que un punto P pertenece a E si uv (O′, P) es una reflexión en una recta. Según [3], axioma 3, existen puntos U I u, V I v, tales que $u = (O', U)$, $v = (O', V)$ y de (2a) junto con el axioma 2 en [3] se deduce que $(O', U)^o (O', V)^o (O'P)^o = (O'^o, U^o)(O'^o, V^o)(O'^o, P^o)$ es una reflexión en una recta, y en consecuencia P^o I E.

En una geometría métrica que es un plano métrico el mapeo ^{o} define un snail map:

(3) En un plano métrico no elíptico, el mapeo ^{o} es un snail map.

Demostración: gh define una rotación por el punto O. Sea l I O la recta ortogonal a (P, P^{gh}). Según [2], pág. 125. $p^l = p^{gh}$. Sea k la recta (O, P) y contemplemos el producto $kgh = l'$; según esto, $p^{l'} = p^{kgh} = p^l \neq P$. [2], pág. 52. nos asegura que $l = l'$, pues la posibilidad que ll' es un producto involutorio con ll' I P conduce a una contradicción, ya que tenemos planos métricos no elípticos. Luego para h I O : $h^o = kgh$.

Sea k ∤ O, entonces existe una recta $v \perp k$ tal que v I O designemos por A la intersección de v con k. La unión (A, P) es k con P I k, P $\neq$ A. Según (2a), $k^o = (A^o, P^o)$ y $v^o \perp k^o$ implica el teorema de Hjelmslev. (Ver [2].)

(4) Sea l una recta de una geometría métrica y E un plano métrico tal que l I E y E $\perp$ Og, Oh. Entonces l^o coincide con la imagen de l bajo un snail map adecuado de E.

Demostración: E $\perp$ Og sí y sólo si existe un s I E con $O's = Og$ para un punto O′ I Og. Del axioma 4 y de la definición de un plano métrico (igual a un campo de puntos) en [1] sigue que E con Og y E con Oh tienen en común una recta, respectivamente. Por lo tanto, existe S I E, Oh, Og. Se termina la demostración análogamente como en (3). Al igual que en una geometría métrica, llamamos al mapeo ^{o}, snail map.

3. **Haces en espacios métricos diferentes de un plano métrico.**

Definición 3: Un conjunto de rectas de una geometría métrica diferente de un plano métrico que satisface la condición (V). «Por cada punto de la geometría métrica pasa una recta del conjunto y dos rectas del conjunto se encuentran siempre en un plano métrico» se llama:

(a) Haz de 1.ª clase, si cada par de rectas diferentes del conjunto tienen un punto de intersección.

(b) Haz de 2.ª clase, si cada par de rectas del conjunto tienen en común una recta perpendicular.

(c) Haz de 3.ª clase, si cada par de rectas del conjunto no tienen en común ni un punto de intersección ni una recta perpendicular.

(5) Sea $\overline{M}$ un conjunto de rectas que satisface la condición (V). Si dos rectas diferentes a b de $\overline{M}$ se cortan en el punto P, entonces cada recta de $\overline{M}$ pasa por P. $\overline{M}$ es entonces un haz de 1.ª clase.

Demostración: Sean a, $b \in \overline{M}$ con a, b I P y $a \neq b$. Suponemos la existencia de una recta $g \in \overline{M}$ con $g \nmid$ P. Contemplamos los siguientes casos:

(a) g, a, b no se encuentran en un mismo plano métrico. Entonces existen los siguientes planos métricos: E(a, b), E(P, g) . (Con E(α, β) anotaremos el plano métrico determinado por α, β, donde α puede ser una recta o un punto y β una recta). E(a, b), E(P, g) no pueden cortarse en un solo punto P, pues, en este caso, g, a no estarían en un plano métrico, situación que contradice la condición (V). Contemplamos el caso donde E(a, b), E(P, g) tienen en común exactamente una recta h que es necesariamente diferente de g. Análogamente a lo anterior, se llega a una contradicción. En el caso de que la intersección de E(a, b) y E(P, g) contiene por lo menos tres puntos no colineales, entonces de [3] sigue que E(a, b) = = E(P, g), hecho que contradice g I E (a, b). En resumen, hemos encontrado que todas las rectas de $\overline{M}$ que no se encuentran en E(a, b) pasan por P.

(b) Sea g I E (a, b), entonces, según (V), existe un $h \nmid$ E(a, b) con $b \in \overline{M}$. Por (a), la recta h pasa por P. Las rectas a, h, g, con a, h I P, no se encuentran en un mismo plano métrico, y aplicando otra vez (a) a las rectas a, h, g, se termina la demostración. En realidad también se ha demostrado el siguiente suplemento para (3):

Sea $\overline{M}$ un conjunto de rectas que satisfacen las siguientes propiedades: cada par de rectas de $\overline{M}$ se encuentran en un plano métrico, pero no todas las rectas de $\overline{M}$ están en un mismo plano métrico, existen dos rectas diferentes. a, $b \in \overline{M}$, con un punto P en común, entonces todas las rectas de $\overline{M}$ pasan por P, es decir, es posible clasificar haces de primera clase por tres rectas adecuadas.

(6) Si un conjunto $\overline{M}$ cumple la propiedad (V) y existen dos rectas diferentes en $\overline{M}$ con una perpendicular en común, entonces $\overline{M}$ es un haz de 2.ª clase.

Demostración: Según (5) ningún par de rectas diferentes de $\overline{M}$ se cortan. Suponemos la existencia de g, $h_1 \in \overline{M}$ y la existencia de l tal que $l \perp g$, h_1 con $g \neq h_1$. Si $h_0 \in \overline{M}$ entonces h_0, h_1 se encuentran en un plano métrico por E por (V).

(a) Sea $g \nmid$ E. Además, suponemos que g, E forman un 3-espacio que siempre contiene los planos métricos E(R, h_0), E(R, h_1) con R I g, l. Según (V), g I E (R, h_0), E (R, h_1); y según [3] se puede escribir E (R, h_1) = = g l R, E (R, h_0) = g t_0 R donde t_0 es la recta ortogonal a g con t_0 pasando por R y t_0 I E (R, h_0). El plano métrico E (l, t_0) es ortogonal a

E, E (h_1, R) y E (h_0, R). De donde sigue que E (l, t_0) es ortogonal a la recta h_0 en la cual se intersecan E (h_0, R) y E. Entonces las rectas h_0, g tienen una perpendicular en común y análogamente para h_0, h_1; pues E (R, h_0) y E (R, h_1) siempre se cortan en g y en consecuencia, g, h_1, h_0 forman un 3-espacio.

(b) Sea g I E tal que h_1, h_2 I E; entonces se elige una recta s $\not\mathrm{I}$ E y se aplica la parte (a) de la demostración. Análogamente, como antes, podemos agregar un suplemento para 6:

Sea $\overline{\mathrm{M}}$ un conjunto de rectas que satisfacen las siguientes condiciones: dos rectas diferentes del conjunto siempre están en un plano métrico. pero no todas las rectas de $\overline{\mathrm{M}}$ se encuentran en un mismo plano métrico, existen en $\overline{\mathrm{M}}$ dos rectas diferentes, a y b, tal que existe $t \perp a, b$. Entonces, cada par de rectas de $\overline{\mathrm{M}}$ tienen en común una recta ortogonal a ambas y $\overline{\mathrm{M}}$ determina un haz de 2.ª clase.

(7) Si $\overline{\mathrm{M}}$ es un conjunto de rectas de una geometría métrica que satisface la condición (V) y existen a, $b \in \overline{\mathrm{M}}$ diferentes, tal que no tienen ni un punto de intersección ni una recta $t \perp a, b$, entonces $\overline{\mathrm{M}}$ es un haz de 3.ª clase. Además, se pueden describir haces de 1.ª y 2.ª clase en la siguiente forma:

(8) (a) Dado un haz de 1.ª clase. Entonces a pertenece al haz si a I P donde P es el punto de intersección de un par de rectas diferentes del haz.

(b) Para un haz de 2.ª clase existe siempre un hiperplano H tal que una recta a pertenece al haz sí y sólo si $a \perp$ H. H se llama el soporte del haz y se escribe G(H).

Demostración: Hay que demostrar solamente (b). Sean g y h dos rectas diferentes del haz de 2.ª clase. Entonces g, h tienen una recta l ortogonal a ambas que también pertenece a E (g, h). Sean K y L las intersecciones de l con g y h, respectivamente; entonces contemplamos el hiperplano Kg = Lh. Sea j recta del haz G (Kg). Para $j \perp l$ según [3], axioma 4, el hiperplano L$h \perp j$, entonces consideramos $j \not\mathrm{I}\ l$.

Sea $l' \perp h, j$. l' I L implica L$h \perp j$. Para l' $\not\mathrm{I}$ L tenemos E (h, j) $\perp$ Lh, pues E (g, h) $\perp$ Lh. Análogamente se ve que E (g, j) $\perp$ Lh. La recta j, que es intersección de E (g, j) con E (h, j), tiene un punto de intersección R con Lh, pues g, j, h determinan un 3-especio. Luego $j \perp$ (R, L), (R, K), lo que significa que $j \perp$ Lh = Kg.

4. Extensión de snail maps a los haces

Contemplamos una geometría métrica que no es un plano métrico y snail maps por el punto O, llamado centro de los snail maps.

(9) El snail map ° con centro O mapea cada haz de 1.ª clase sobre un haz de 1.ª clase.

La demostración es una consecuencia directa de (8a) y de la definición 1.

(10) Sea ° el snail map determinado por gO, hO. (a) Si H es un hiperplano ortogonal a gO y hO, entonces G(H) queda fijo bajo °.

(b) El conjunto de todos los hiperplanos H tales que cada punto P I gO, hO pertenece a H queda invariante bajo $^{\circ}$.

Sea H = Pv con P I gO, hO. Por (4), $v \perp l$, con v I Og, Oh y l I E (g, h), implica $v^{\circ} = v \perp l^{\circ}$. Luego P$v \rightarrow$ Pv° pasa v I Og, Oh.

Sea $v \in$ E(g, h), entonces, según (4), se tiene que $v^{\circ} = vgh \in$ E(g, h).

Por lo tanto, $(\mathrm{P}v)^{\circ} = \mathrm{P}v^{\circ}$, lo que demuestra (b).

(11) Para cada haz que no es un haz G(H) con H I O existe un snail map $^{\circ}$ con centro O, tal que la imagen del haz es una haz de 1.ª clase.

Demostración: 1. Si el haz es un haz de 1.ª clase, entonces se tiene la propiedad por (9).

2. Dado el haz G(H) con G(H) $\neq$ G(H_0) y H_0 I O. Consideremos g perpendicular a H tal que g I O, F, donde F I H y R un punto en H diferente de F. Con v designamos la recta que pasa por R y F. Las rectas g, v determinan un plano métrico E$(g, v) \perp$ H y la intersección de E(g, v) con H es exactamente la recta v. Según (4), snail maps determinados por hiperplanos ortogonales a E(g, v), inducen en E(g, v) snail maps planos con centro O. Se sabe por [2], pág. 98, que el haz plano G(v) de E(g, v) se puede mapear por un snail map plano, que es determinado por g, h (donde h es una recta adecuada de E(g, v)) en un haz G(P) con P I E(g, v).

Ahora contemplamos el snail map $^{\circ}$ de la geometría métrica determinado por Og, Oh. Según (2b) y el suplemento para (6) queda por demostrar la existencia de una recta u del haz G(P) que sea imagen de una recta del haz G(H) y u no está en E(g, v). Sea K I H; entonces H = K k para $k \perp$ H; es decir, k es una recta de G(H) y k° no está en E(g, v).

3. Supongamos ahora que el haz es un haz de 3.ª clase y que g, v son rectas del mismo haz con g I O. g, v forman el plano E(g, v) I O y determinan en E(g, v) un haz plano de 3.ª clase, para el cual, según [2], existe un snail map plano determinado por g, h (donde h es una recta adecuada de E(g, v)) que mapea este haz de E(g, v) en un haz de 1.ª clase. Contemplamos el snail map $^{\circ}$ de la geometría métrica determinado por Og, Oh, entonces encontramos análogamente, como en 2, el haz de 1.ª clase.

En general, los snail map mapean las rectas de un haz en el conjunto de las rectas de un haz. Hecho conocido del plano métrico, el cual, según la demostración de (11), también se tiene en una geometría métrica.

(12) Sean gO, hO hiperplanos que determinan un snail map con centro O y g'O, h'O dos hiperplanos con $g' \pm h'$, tales que P I gO, hO' implique P I g'O, h'O. Entonces, para el snail map $^{\circ}$ determinado por g'O, h'O, se tiene: $\mathrm{P}^{\circ *} = \mathrm{P}^{*\circ}$.

La demostración es una consecuencia de (4) y [2].

(13) Un snail map es una biyección del conjunto de los haces sobre sí mismo.

Demostración: 1. *Inyectividad*:

Para a, $b \in$ G existe, según Def. 3, un plano métrico E tal que a, b I E; según (2), se tiene que a°, b° I E$^{\circ}$. Los suplementos de (5), (6) y (7) muestran que las imágenes de las rectas de G están en un mismo haz. Sean G_0, G_1 dos haces que bajo el snail map ^{o} tiene el haz G como imagen. Sean, además, $u_i \in G_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ y $u_i \perp H_1$, H_2 donde H_1, H_2 son los hiperplanos que determinan el snail map ^{o}. Entonces se tiene que $u_2 =$ $= u_0^o = u_0 H_1 H_2 = u_1 H_1 H_2 = \overset{o}{u}_1$, es decir, $u_0 = u_1$. Como $u_1 \neq u_2$, entonces u_1, u_2 forman un plano métrico E′ que es ortogonal a H_1 y H_2 o a $H_1 = O g_1$ $H_2 = O g_2$, donde O, g_1, g_2 pertenecen a E′. Según (4) se tiene que $u_2 = u_0^o = u_1^o = u_1 g_1 g_2$. Pero en E′, ^{o} es una biyección en el conjunto de los haces, es decir, $G_0 = G_1$.

2. *Sobreyectividad*

Busquemos la preimagen de un haz $\overline{M}$. Sean $G(P^o)$, $G(Q^o)$, $G(R^o)$ tres haces de 1.ª clase, tales que las rectas $a = (P^o, Q^o)$, $b = (Q^o, R^o)$, $c = (R^o, P^o)$ son diferentes y no pertenecen a $\overline{M}$. Sean p', q', $v' \in M$ con p' I P^o, q' I Q^o, v' I R^o. Los planos métricos E (q', v') $E(v', p')$, $E(p', q')$ no tienen en común una misma recta. Sea q_0 I $E(q', v')$ tal que q_0 I Q^o y $q_0 \neq q'$. Entonces $E(q', v') = E(q', q_0)$. Análogamente, si v_0 I $E(v', p')$, v_0 I R^o y $v_0 \neq v'$.

Entonces $E(v', p') = E(v', v_0)$ y p_0 I $E(p', q')$ con p_0 I P^o, $p_0 \neq p'$. Esto implica que $E(p', q') = E(p', p_0)$. Según (9) y (2a), un snail map mapea el conjunto de rectas de un haz de 1.ª clase biyectivamente sobre el conjunto de rectas de un haz de 1.ª clase, lo que significa que las preimágenes E_1, E_2, E_3, de los planos métricos $E(q', q_0)$, $E(v', v_0)$, $E(p', p_0)$ no se cortan en una misma recta. Contemplemos ahora las preimágenes p, q, v de p', q', v' que existen, y por la construcción se tiene:

$$q \ \mathrm{I}\ E_1, E_3 \ ; \ q \not\mathrm{I}\ E_2$$
$$v \ \mathrm{I}\ E_1, E_2 \ ; \ v \not\mathrm{I}\ E_3$$
$$p \ \mathrm{I}\ E_2, E_3 \ ; \ p \not\mathrm{I}\ E_1$$

Entonces p, q, v no pertenecen al mismo plano métrico. Según los suplementos para (5), (6), (7) esas tres rectas representan un haz $\overline{M}_0$.

Sea $l_0 \in \overline{M}$, entonces l_0, p se encuentran en un mismo plano métrico. La imagen de este plano métrico es un plano métrico que contiene l_0^o y también p'. Análogamente, para q, v y l_0. Luego l_0^o es recta de $\overline{M}$ o bien $\overline{M}_0$ es la preimagen de M.

DEFINICIÓN 4: El conjunto de los haces se considera como un conjunto de puntos ideales y se designan por $\underline{P}$, $\underline{Q}$, $\underline{R}$... Los haces de 1.ª clase se llaman puntos ideales propios y los demás, puntos ideales impropios.

DEFINICIÓN 5: Sea 0 un punto fijo de la geometría métrica:

(0) El conjunto de puntos ideales $\{\overline{M} \mid a \in \overline{M};$ a recta métrica$\}$ se llama recta ideal propia.

(I) Un conjunto de puntos ideales es el conjunto de puntos de una recta ideal si existe un snail map^o tal que ^{o} mapea este conjunto sobre el conjunto de puntos de una recta ideal propia.

(II) El conjunto de puntos determinado por haces de 2.ª clase $G(Og_i)$ con g_i I O forman una recta ideal si las rectas g_i están en un *mismo plano métrico* E y se dice que este plano métrico determina la resta ideal.

Las rectas ideales del conjunto $\overline{G}$ se designan por $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, ... La incidencia entre punto ideal y recta ideal del tipo (O) y (II) es clara; para rectas del tipo (I) la incidencia se explica por las imágenes del snail map.

Definición 6: Sean H, H′ dos hiperplanos con P I H, H′. Definimos como eje $\overline{A}$ al conjunto de puntos que pertenecen a H y H′.

Si H, H′ determinan un snail map °, entonces $\overline{A}$ se llama también eje de °.

Desde luego, para cada eje $\overline{A}$ existen snail maps diferentes.

Lema 1: Sean v, l rectas que pasan por un punto P del eje $\overline{A}$ y $v \perp l$. $v \in \overline{A}$ implica $v^o = v \perp l^o$ para cada snail map ° con eje $\overline{A}$.

Demostración: Supongamos que gO, hO determinan $\overline{A}$ y contemplemos el snail map ° definido por estos hiperplanos. l es recta de un plano métrico que es ortogonal a gO, hO en el punto P. La afirmación sigue ahora de (1) y (4).

Lema 2: Sean $\overline{A}$, $\overline{B}$ dos ejes diferentes que pasan por un punto P. $\overline{A}$ y un punto $B \in \overline{B}$ con $B \notin \overline{A}$ determinan un hiperplano que contiene estos puntos y que también contiene todos los puntos de $\overline{B}$.

Demostración: Sea $\overline{A}$ determinado por gO, hO donde se pueden elegir g, h como rectas en un plano métrico designado por $E(g, h)$. Para cada recta v I O de $E(g, h)$ se tiene que el producto $v\ g\ h$ es una recta que implica que $Ov\ Og\ Oh$ es un hiperplano que contiene todos los puntos de $\overline{A}$ (ver [3], 8.5). Para B I $E(g, h)$ la recta v es únicamente determinada como la perpendicular en $E(g, h)$ de la recta (P, B) que pasa por el punto P. Si B $\not\mathrm{I}$ $E(g, h)$, entonces contemplamos la recta t ortogonal a $E(g, h)$; esta construcción es posible, pues B, $E(g, h)$ determinan un 3-espacio. t corta a $E(g, h)$ en el punto B′. Entonces es posible construir la recta v como más arriba. Ahora mostramos que en el caso que $B \in \overline{B}$ todos los puntos de $\overline{B}$ pertenecen al hiperplano. Sean Pv el hiperplano construido con $\overline{A}$ y $\overline{B}$ y $B' \in \overline{B}$ con $B' \in \overline{A}$ y B′ I (P, B). $E(g, h) \perp Og, Oh$, es decir, cada recta de $E(g, h)$ que pasa por P es ortogonal a cada recta de $\overline{B}$ que pasa por P. Como v I $E(g, h)$ hemos terminado la demostración.

(14) Sea ° un snail map con eje $\overline{A}$ y $P \in \overline{A}$. Entonces ° mapea cada H I P a un hiperplano que también pasa por P.

Demostración: 1. Por Lema 1, el hiperplano $H_{\perp} = Pv$ con v, P I $\overline{A}$ es fijo.

2. Lema 1, (1) y [3] 8.5 implican que los hiperplanos $H_{\overline{A}}$ — son los hiperplanos que contienen todos los puntos de $\overline{A}$ — van a $H_{\overline{A}}{}^o$ con

$H_{\overline{A}}\ \overset{o}{A}_{\overline{A}} = Og\ Oh$.

3. Sea H I P un hiperplano que contiene todos los puntos de $\overline{A}$ y que tampoco es ortogonal a $\overline{A}$. Además, sea $\overline{B}$ la intersección de H con $H_{\perp}$. Para $\overline{B}$ y un punto $A \in \overline{A}$, $A \notin \overline{B}$ existen según lema 2 un hiperplano H′ tal que H′ contiene todos los puntos de $\overline{A}$. Según 1., 2., $\overline{B}^{o} \in H'^{o}$, $H_{\perp}$. Sea K un punto de H que no está en $\overline{B}$, entonces $K^o \notin H^o$. Luego por lema 2, K^o, $\overline{B}^o$ determinan un hiperplano H^o. Para que H^o sea imagende de H hay que demostrar: R I H si, y sólamente si, R^o I H^o.

Contemplemos un punto R que no pertenece a $\overline{B}$ y tampoco está en (P, K). Entonces (P, K) y (P, R) determinan un plano métrico que corta a $\overline{B}$ en una recta t, entonces (P, K) (P, R) t es una recta. Según [3], axioma 3, existen puntos P_i ($i = 1, 2, 3$), tales que (P, K) $=$ (P, P_1); (P, R) $=$ (P, P_2); $t =$ (P, P_3) y (P_1, P_2) $=$ (P_1, P_3). Aplicamos ahora ^{o} a estas rectas y puntos, entonces ^{o} preserva las incidencias y P_1^o I (P, K^o); $P_3^o \in \overline{B}^o$. Por lo tanto, la recta (P_1^o, P_3^o) pertenece a H^o y por (2a) también $P_2^o \in H^o$; es decir, todos los puntos de (P, P_2^o) pertenecen a H^o, en particular R^o.

(15) Sean * un snail map con centro O y $\underline{a}$ una recta ideal, entonces $\underline{a}^*$ es una recta ideal.

Demostración: (2a) y (13) implican la afirmación para rectas del tipo (O) y (14) muestra el teorema para rectas del tipo (II).

Sea entonces $\underline{a}$ una recta ideal del tipo (I); para $\underline{a}$ existe un snail map^o que mapea $\underline{a}$ a una recta ideal propia $\underline{a}^o$.

1. Si * y ^{o} tienen el mismo eje $\overline{A}$, entonces (12) implica la afirmación.

2. Supongamos entonces que * y ^{o} tienen ejes diferentes. Contemplamos el conjunto $\underline{a}^*$ de puntos ideales. Sea $\underline{S}^*$ un punto ideal de $\underline{a}^*$ con $S \neq G(vO)$. Por las hipótesis y (14) existe este punto $\underline{S}^*$.

Por (11) existe un snail map $^{\blacksquare}$ tal que $\underline{S}^{*\blacksquare}$ es un punto ideal propio. Todos los haces que determinan puntos ideales de $\underline{a}^o$ tienen en común una recta métrica a. Entonces cada punto métrico que no es un punto ideal de la recta ideal $\underline{a}^o$ determina, junto con $\underline{a}^o$, un plano métrico y todos estos planos métricos contienen, desde luego, la recta a. Sean Q_i ($i = 1, 2$) puntos que determinan, junto con a, planos métricos E_i diferentes y supongamos, además, que las preimágenes de Q_i bajo ^{o} son puntos métricos. Entonces las preimágenes de los Ei bajo ^{o} son también planos métricos. Además, E^*_i, $E_i^{*\blacksquare}$ son diferentes y $E_i^{*\blacksquare}$ contiene el punto ideal propio $\underline{S}^{*\blacksquare}$. Por (2b) y [3], Ei^{*o} pertenecen a un 3-espacio y se cortan en una recta métrica.

(16) Por dos puntos ideales diferentes, $\underline{P}$, $\underline{Q}$, pasa una única recta ideal.

Demostración: 1. Sean $\underline{P} = G(Og_1)$ y $\underline{Q} = G(Og_2)$ con O punto fijo que aparece en la definición 5. Entonces g_1, g_2 están en un mismo plano métrico y $\underline{P}$, $\underline{Q}$, se encuentran en la correspondiente recta ideal determinada por este plano métrico.

2. Sean $\underline{P}$, $\underline{Q}$ diferentes de los haces $G(Og_i)$, entonces por (11) existen snail maps ^{o} y * con centro O, tales que $\underline{P}^o$ y $\underline{Q}^{o*}$ son puntos ideales

propios. Por lo tanto, P^o, $\underline{Q}^o$ están sobre una recta ideal propia, lo que significa por definición que P, $\underline{Q}$ están en una recta ideal.

3. Sean $\underline{Q} = G(Og_1)$ y P diferente de los haces $G(Og_i)$. Entonces existe un snail map ^{o} tal que P^o es propio. De $G(Og_1)^o = G(Og_2)$ y definición 3 sigue la existencia de una recta métrica a, que pertenece a los haces $G(Og_2)$ y $\underline{P}^o$. La preimagen de la recta ideal propia $\underline{a}$ determinada por a es la recta ideal buscada. La unicidad sigue del siguiente teorema.

Antes de continuar necesitamos una definición.

Definición 7: Decimos que dos rectas ideales, $\underline{g}$, $\underline{h}$, son planas si se satisface cualquiera de las tres condiciones siguientes:

(A) existe un snail map^o con centro O tal que $\underline{g}^o = \underline{h}$.

(B) $\underline{g}$ es una recta ideal del tipo (II) y E es el plano métrico que determina $\underline{g}$ y la otra recta ideal $\underline{h}$ no es una recta ideal del tipo (II) y existe un snail map ^{o} con centro O tal que $\underline{h}^o$ es una recta ideal propia y la recta métrica h que determina $\underline{h}^o$ pertenece al plano métrico E^o.

(C) $\underline{g}$, $\underline{h}$ son rectas ideales del tipo (I)) y los planos métricos E_0, E_1, que determinan $\underline{g}$ y $\underline{h}$, respectivamente, se cortan en una unica recta métrica.

(17) Dos rectas ideales planas diferentes se cortan en un único punto ideal.

Demostración: Trivialmente se ve que dos rectas ideales propias, que son determinadas por rectas métricas pertenecientes a un plano métrico, tiene un punto ideal en común. Por lo tanto, todas las rectas ideales planas del tipo (A) tienen un punto ideal de intersección. Sean $\underline{g}$, $\underline{h}$ un par del tipo (B) en definición 7, entonces la recta ideal propia $\underline{h}^o$ es determinada por una recta métrica h de E^o. Contemplamos la recta l de E^o, tal que $l \perp h$ y l I O. Sea v I O y $v \perp l$, entonces h preimagen del hiperplano Ov determina el punto ideal en el cual se cortan $\underline{g}$ y $\underline{h}$.

En caso (C) sea k la recta en la cual se cortan E_0 y E_1. El hiperplano Ok determina el punto intersección entre $\underline{g}$ y $\underline{h}$.

La unicidad del punto de intersección es obvia.

(18) Si una recta ideal $\underline{a}$ contiene un punto ideal propio, entonces es una recta ideal propia.

La demostración sigue inmediatamente de la definición de haces.

(19) Los conjuntos de puntos ideales y de rectas ideales satisfacen el axioma de Veblen-Young.

Demostración: El axioma de Veblen-Young tiene el siguiente enunciado: Si de los puntos ideales A, B, C, D los puntos $\underline{A}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$ se encuentran sobre la recta ideal $\underline{u}$; $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{E}$ sobre v; $\underline{A}$, $\underline{B}$ sobre $\underline{r}$ y $\underline{D}$, $\underline{C}$ sobre $\underline{s}$, entonces $\underline{r}$, $\underline{s}$ se cortan en un punto ideal $\underline{F}$. Si es posible mapear por un snail map con centro O cuatro de los cinco puntos ideales en puntos ideales propios, entonces por [3], definición 3 y (18), por ejemplo, $\underline{u}$, $\underline{v}$ propias y planas, lo que significa que $\underline{r}$, $\underline{s}$ también son planas y esto implica la existencia del punto de intersección (17).

Si no es posible mapear cuatro de los puntos ideales, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, $\underline{E}$, en puntos ideales propios por snail map con centro O, entonces todas las rectas ideales que aparecen en el axioma de Veblen-Young son del tipo (II) de la definición 5. Sean $E_{\underline{u}}$, $E_{\underline{v}}$, $E_{\underline{r}}$, $E_{\underline{c}}$ los planos métricos que dedeterminan las rectas ideales $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{r}$, $\underline{s}$, respectivamente. Aparte de $E_{\underline{r}}$, $E_{\underline{s}}$ cada par diferente de los cuatro planos métricos tienen en común una recta que pasa por O. Ahora mostramos que también $E_{\underline{r}}$, $E_{\underline{s}}$ se cortan en una recta métrica, lo que determina la demostración.

[3] nos asegura que las rectas métricas, en las cuales se cortan los planos métricos forman un 3-espacio. Pero en este 3-espacio $E_{\underline{r}}$, $E_{\underline{s}}$ se cortan según la hipótesis en el punto O, lo que implica la existencia de una recta de intersección.

(20) Las rectas ideales son independientes del punto O. centro de los snail maps, usado en la construcción.

Demostración: 1. Sea ^{o} el snail map con centro O determinado por Og, Oh tal que $\underline{a}^{o}$ es una recta ideal propia. Sea O′ un punto del eje de ^{o} diferente de O. Entonces por [3] se tiene $Og = O'g'$; $Oh = O'h'$ para rectas adecuadas g', h' I O′. Es decir, $\underline{a}$ es también una recta ideal respecto de O′.

2. Sea $\underline{a}$ recta ideal respecto de O. Elegimos un punto cualquiera O′ de la geometría métrica con $O' \not\mathrm{I}\ gO$, hO. Si $\underline{a}$ contiene dos puntos ideales diferentes del tipo $G(O'r_i)$, r_i I O′, entonces $\underline{a}$ es también una recta ideal con respecto a O′.

Suponemos, entonces, que $\underline{a}$ no contiene dos puntos ideales de este tipo. Contemplemos dos puntos ideales diferentes, $\underline{P}$, $\underline{Q}$, de $\underline{a}$ los cuales sean diferentes de los haces $Go(O'v)$. Sean p y q las rectas métricas que pasan por los haces O′, $\underline{P}$ y O′, $\underline{Q}$, respectivamente. Consideremos el plano métrico E determinado por p, q y el snail map plano. Este snail map plano mapea $\underline{P}$, $\underline{Q}$ en una recta métrica de E. Pero podemos alterar este snail map plano en E por un snail map * de la geometría métrica que, restringido a E, nos da dicho snail map plano. Supongamos que * es determinado por O′g', O′h' con g', h' I E. Sea ^{o} el snail map con centro O determinado por Og, Oh tal que $\underline{a}^{o}$ es propia.

Si Og, Oh, O′g', O′h' tienen en común un punto P, entonces, según (15), $\underline{a}^{*}$ es una recta ideal que contiene por construcción puntos ideales propios, es decir, $\underline{a}$ es también recta ideal respecto de O′. Si Og, Oh, O′h', O′h' no pasan por un mismo punto, entonces contemplamos un snail map definido por $Pg_1 = Qg_1'$, $Pg_2 = Qg_2'$ con P I Og, Oh y Q I O′g', O′h'.

Así, hemos demostrado que los elementos ideales forman una geometría proyectiva y la geometría proyectiva es independiente del centro de los snail-maps.

BIBLIOGRAFIA

[1] I. Ahrens: «Begründung der absoluten Goemetrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff», *Math. Zeitschr*, **71**, 154-185 (1959).

[2] F. BACHMANN: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* 1. Auflage. Berlin, 1959.

[3] G. EWALD: *Spiegelungsgeometrische Kennzeichnung euklidischer und nichteuklidischer Raume beliebiger Dimension.* Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 41 (1974).

[4] H. KINDER: *Begrundung dern-dimensionalen absoluten Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Disseration Kiel 1965.

[5] H. LENZ: «Zur Begrundung der analytischen Geometrie». *Bayr Akad. Wiss., Math.* Nat. Klasse 1954, 17-52.

[6] H. LENZ: «Haldrehungen im Raum». *Math. Zeitschr.*, **78**, 410-419 (1962).

[7] J. T. SMITH: *Metric geometries of arbitary dimension.*

[8] O. VEBLEN, J. YOUNG: *Projektive geometries,* vol. 1, Boston, 1910.

[9] O. WYLER: «Incidence geometries», *Duke mat. j.,* **20**, 601-610 (1953).