EL ESPACIO DE MONTEL DE LAS FUNCIONES VECTORIALES ARMONICAS EN UN DOMINIO

por

GONZALO GONZALEZ DE BUITRAGO DIAZ

Sea C el cuerpo de los números complejos; D, un dominio contenido en C, y $C_m(D)$ el espacio de las funciones continuas de D en C^m $(m \geqslant 1)$ con la topología usual de la convergencia uniforme por compactos. Según un conocido teorema, el subespacio $H_m(D)$ de las funciones holomorfas en D con la topología inducida, es un espacio de Montel. Sea $H^*_m(D)$ el espacio de las funciones armónicas en D con valores en C^m dotado de la misma topología.

Es conocido también ([1], págs. 273-275) que las funciones armónicas reales, definidas en D, forman un espacio de Montel, lo que permite, por otra parte, enunciar el teorema de Harnack ([1], pág. 275) de convergencia de funciones armónicas, postulando solamente la convergencia simple acotada por compactos.

Estos resultados son fácilmente generalizables a funciones armónicas de D en C. A su vez, se puede obtener de modo elemental, una extensión a funciones armónicas de D en C^m.

Es interesante, sin embargo, observar que el caso más general ultimamente citado, de funciones armónicas a valores vectoriales, puede obtenerse directamente por el método que exponemos a continuación.

Comenzaremos probando el siguiente lema.

LEMA.—Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones con valores en C^m, continuas y uniformemente acotadas en un disco cerrado $\overline{B}$, de centro cualquiera a y radio r, y armónicas en el interior B del disco. De ella puede extraerse una subsucesión uniformemente convergente en cualquier disco cerrado $\overline{B}\ (a, \rho)$ de centro a y radio $\rho < r$.

Demostración.—Basta considerar el caso en que $a = O$; es conocido que cada función $h(z)$ a valores e un espacio de Banach complejo, armónica en $B(o, r)$ y continua en $\overline{B}(o, r)$ está unívocamente determinada por sus valores en el borde, e incluso puede expresarse en función de éstos para $z = \rho e^{it}$, $\rho < r$ ([2], págs. 442, 446-448), por la integral de Poisson

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{(r^2 - \rho^2)\, h\,(r\, e^{i\theta})}{r^2 - 2\, r\, \rho \cos(t - \theta) + \rho^2}\, d\theta$$

que, a su vez, puede descomponerse en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{|\zeta| = r} \frac{h(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \int_{|\zeta| = r} \frac{h(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \dfrac{r^2}{\bar{z}}}\right]$$

(las integrales están tomadas en sentido directo).

Por hipótesis, existe una constante $M \geqslant 0$, tal que

$$\|f_n(z)\| \leqslant M$$

para todo n, luego

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = r} \frac{f_n(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}\right\| \leqslant r\, \frac{M}{r - \rho},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = r} \frac{f_n(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \dfrac{r^2}{\bar{z}}}\right\| \leqslant \frac{M\, \rho\, r}{r\,(r - \rho)}.$$

Por el principio de selección, de la sucesión

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = r} \frac{f_n(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

puede extraerse una subsucesión, F_{n_j}, uniformemente convergente en cada disco $\overline{B}\,(o, \rho)$ de radio $\rho < r$.

A su vez, de la sucesión

$$G_{n_j}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta| = r} \frac{f_{n_j}(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - \dfrac{r^2}{\bar{z}}}$$

puede extraerse otra $G_{n_{j_k}}$ uniformemente convergente en $\overline{B}(o, \rho)$; luego la subsucesión $f_{n_{j_k}}$ de $f_n = F_n - G_n$ es uniformemente convergente en cada disco $\overline{B}(o, \rho)$.

Utilizando este lema, puede demostrarse el siguiente teorema, que evidencia que $H^*_m(D)$ es un espacio de Montel.

TEOREMA 1. Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones de $H^*_m(D)$ uniformemente acotada en cada compacto $K \subset D$. De ella puede extraerse una subsucesión, uniformemente convergente por compactos, hacia otra función, $f(z)$, armónica en D.

Demostración. Sea $\overline{B}_1$, $\overline{B}$, . . . , $\overline{B}_n$, . . ., una sucesión de discos compactos contenidos en D, cuyos interiores constituyan un recubrimiento abierto de D. Según el lema anterior, de la sucesión $f_n(z)$, puede extraerse otra $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{1n}, \ldots$, uniformemente convergente en B_1, de ésta, a su vez, puede extraerse otra, $f_{21}, f_{22}, \ldots, f_{2n}, \ldots$, uniformemente convergente en $B_1 \cup B_2$, y siguiendo este proceso obtendremos una subsucesión

$$f_{p1}, f_{p2}, \ldots, f_{pn}, \ldots,$$

uniformemente convergente en $\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2 \cup \ldots \cup \overline{B}_p$.

La sucesión diagonal $f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn}, \ldots$, converge uniformemente sobre todo compacto $K \subset D$, en virtud del teorema de Heine-Borel.

Como consecuencia, se obtiene, lo mismo que para funciones analíticas, la siguiente forma del teorema de Harnack:

TEOREMA 2. Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones de $H^*_m(D)$ uniformemente acotadas por compactos que converge simplemente en D hacia una función $f(z)$. Entonces $f(z)$ es también armónica, y $f_n(z)$ tiende a $f(z)$ uniformemente por compactos.

BIBLIOGRAFIA

[1] COURANT-HILBERT: *Methods of Mathematical Physics* (volume II). Interscience Publishers.

[2] G. GONZÁLEZ DE BUITRAGO: «Representación analítica de las distribuciones» (*Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, 1974, tomo 68, cuaderno 3.º).