ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE KRASNOSELSKI

por

M. Arrate Peña y F. Sáiz Zaldo

En F. I. Bonsall [2] «Lectures on some fixed point theorem of functional analysis», se establece el siguiente teorema debido a Krasnoselski:

Teorema. «Si K es un conjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach uniformemente convexo y si f es una aplicación de K en un subconjunto de K tal que

$$||f(x) - f(y)|| \leqslant ||x - y||$$

entoncés la sucesión obtenida por la elección de $x_1 \in K$ y definida por recurrencia de la forma:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[x_n + f(x_n)]$$

converge en algún $z \in K$ y además $f(z) = z$.»

En el caso real, tomando $K = [a, b]$ y f una aplicación de $[a, b]$ en sí mismo, el teorema ha sido generalizado por B. Hillam, ver referencia [5] en el siguiente sentido:

Teorema. «Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una aplicación Lipschitziana de constante $L > 0$. Sean

$$x_1 \in [a, b] \text{ y } x_{n+1} = \frac{1}{1+L}[x_n + f(x_n)] \text{ para } n \geqslant 2.$$

Entonces, la sucesión

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

converge monótonamente sobre un punto fijo de f.»

Sea ahora la ecuación diferencial

$$\text{(i)} \qquad x' = f(t, x)$$

donde f es una función continua y globalmente lipschitziana respecto a la segunda variable en algún dominio Ω de R^2. Entonces, tenemos garantizada la existencia y unicidad de soluciones de (i) pasando por cada punto de Ω.

En lo que sigue, Ω será la banda $R \times (c, d)$, donde $c < a < b < d$, y además para todo t real se verificará $f(t, K) \subset K$ siendo $K = [a, b]$.

Bajo estas condiciones, y como consecuencia inmediata del teorema de Krasnoselski generalizado, podemos garantizar que para cada $t \in R$ existe un z tal que:

$$f(t, z) = z$$

y consecuentemente, la solución de (i) pasando por (t, z) tendrá en dicho punto la pendiente igual a su ordenada.

Basta con considerar la ecuación

$$x' = x$$

para ver que la correspondencia que envía t en z no es una aplicación.

En este caso es $L = 1$.

Es inmediato por el teorema de Banach del punto fijo que si $L < 1$ dicha correspondencia es una aplicación de R en $[a, b]$.

Demostramos ahora que es continua:

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\varepsilon' = (1 - L)\varepsilon$ donde al ser $0 < L < 1$, $1 - L > 0$, con lo que $\varepsilon' > 0$.

Teniendo en cuenta la continuidad de f, Existirá $\delta > 0$ tal que:

$$|t - t_0| < \delta \text{ implica } |f(t, z) - f(t_0, z)| < \varepsilon'$$

Entonces

$$|z - z_0| = |f(t, z) - f(t_0, z_0)| \leqslant |f(t, z) - f(t_0, z)| \leqslant |f(t_0, z) - f(t_0, z_0)| < \\ < \varepsilon' + |f(t_0, z) - f(t_0, z_0)| \leqslant \varepsilon' + L|z - z_0|$$

cuando $|t - t_0| < \delta$. Despejando queda

$$|z - z_0|\,(1 - L) < \varepsilon'$$

de donde

$$|z - z_0| < \frac{\varepsilon'}{1 - L} = \varepsilon$$

y la aplicación $t \to z$ es continua cuando $L < 1$.

En el caso $L = 1$ no podemos garantizar la unicidad del punto fijo. Lo vimos mediante un ejemplo.

Si $L > 1$, no pudiéndose mejorar esta constante, tampoco se puede garantizar la unicidad del punto fijo. Veamos el siguiente ejemplo:

Sea $f : [-1, 1] \times R \to [-1, 1]$ dada por

$$f(t, x) = \begin{cases} 2x & \text{si } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad , \quad -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2-2x & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \quad , \quad -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ -2-2x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2} \quad , \quad -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

que tiene tres puntos fijos para cada t.

Supongamos ahora que $L \geqslant 1$. Veamos en qué condiciones la correspondencia $t \to z$ es una aplicación.

Sea z_0 un punto fijo de $f(t, z)$ correspondiente al punto t_0. Supongamos que $f(t, z)$ admite en un entorno de (t_0, z_0) derivada parcial continua respecto a z y supongamos que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(t_0, z_0)} \neq 1$$

La aplicación $h(t, z) = f(t, z) - z$ es continua en un entorno de (t_0, z_0). Se verifica que $h(t_0, z_0) = f(t, z_0) - z_0 = 0$ y h admite derivada parcial respecto a z continua en dicho entorno. Además

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)_{(t_0, z_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(t_0, z_0)} - 1 \neq 0$$

Por el teorema de las funciones implícitas existen entornos U y V de t_0 y z_0, respectivamente, tales que $\forall t \in U$ existe un y sólo un $z \in V$ tal que: $(t, z(t))$ está en el entorno de (t_0, z_0) donde h está definida y es continua.

$$h(t, z(t)) = 0, \text{ o sea, } f(t, z(t)) = z(t)$$

y la aplicación $t \to z(t)$ es continua en U.

Como ya es sabido, el teorema de las funciones implícitas sigue siendo cierto bajo condiciones más debilitadas. Véase, por ejemplo, Erwe, *Cálculo diferencial e integral* [3].

Admitamos, por el momento, que es posible construir una aplicación $\Phi : R \to (c, d)$ tal que $\Phi(t)$ es un punto fijo para $f(t, z)$. Tendríamos que si $\Phi(t)$ fuese solución de (1), que:

$$\Phi'(t) = f(t, \Phi(t)) = \Phi(t)$$

por lo que:

$$\Phi(t) = Ce^t$$

Como todo punto (t, z) del plano se puede expresar en la forma (t, Ce^t), es inmediato que $f(t, z) = z$.

Vamos a considerar ahora la función $f : [t_0, t_0 + \alpha] \times R$ continua y globalmente lipschitziana.

Vamos a considerar, para cada $v \in R$, el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = v \end{cases} \tag{ii}$$

Sabemos que si f es globalmente lipschitziana y continua en la banda, cada uno de los problemas anteriores admite una solución $x = \eta(t, v)$ definida en $[t_0, t_0 + \alpha]$ única.

Por otra parte, teniendo en cuenta la desigualdad fundamental

$$|\eta(t, v_1) - \eta(t, v_2)| \leqslant |v_1 - v_2| e^{L\alpha}$$

y, en consecuencia, η es globalmente lipschitziana en su dominio de definición: $[t_0, t_0 + \alpha] \times R$. En orden de aplicar el teorema de Krasnoselski vamos a considerar un conjunto invariante de la ecuación diferencial, dada que sea compacto, sea M.

Mediante dicho teorema, existirá para cada $t^* \in [t_0, t_0 + \alpha]$ un elemento $x^* \in M$ tal que $\eta(t^*, x^*) = x^* = \eta(t_0, x^*)$, es decir, que x^* es imagen de, al menos, dos valores de t.

Cuando el sistema es autónomo, es bien conocido que la solución $\eta(t, x^*)$ resulta ser periódica.

Bajo las condiciones anteriormente descritas, y cuando el sistema es autónomo podemos garantizar la existencia de soluciones periódicas.

REFERENCIAS

[1] BAILEY, D. F.: «Krasnoselski's theorem on the real line», *Amer Math. Monthly*, **81** (1074), 167-168.

[2] BONSAL, F. I.: *Lectures on some fixed point theorems of functional analysis*, Tata Institute. Bombay.

[3] ERWE, F.: *Cálculo diferencial e integral*, Sel. Científicas. Madrid.

[4] HARTMAN, P.: *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York-London-Sydney.

[5] HILLAM, B. P.: «A generalization of Krasnoselski's theorem on the real line», *Math. Mag.*, **48**, 1975 (167-168).