DESIGUALDADES

por

VALERIANO ZORÍO BLANCO

PRÓLOGO.—Vamos a tratar de dos desigualdades de gran importancia en la matemática: la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Minkowski. Las estudiaremos en su forma generalizada.

Es interesante resaltar que ambas desigualdades, válidas para sumas, series e integrales, se basan en un teorema único, cuya demostración eludimos, y que llamaremos *teorema fundamental*. En este teorema se apoya la demostración de la desigualdad de Hölder; y, a su vez, la demostración de la desigualdad de Minkowski se basa en la de Hölder.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz, que se demuestra directamente en los tratados de Análisis, puede considerarse como un caso muy particular de la desigualdad de Hölder.

BIBLIOGRAFIA

1. *Inegualities*, de HERDY, LITTLAWOOD, POLYA. Cambridge University Press (1.ª edición, 1934; 2.ª edición, 1952; posteriormente, reimpresiones en 1959, 1964, 1967 y 1973).

2. *Geometric Inegualities*, de N. D. KAZARINOFF. Random House (New Mathematical Library, año 1961).

El segundo libro es más elemental. Hemos seguido el esquema e ideas fundamentales de la primera obra citada, que es el tratado más completo que sobre la materia se conoce. La exposición tiene el suficiente rigor e intenta ser una síntesis, reducida a lo esencial, de la obra de Hardy-Littlewood-Polya, en donde se trata el tema muy extensamente.

I. DESIGUALDAD DE HÖLDER

1. Teorema fundamental.

La desigualdad de Hölder se basa en el siguiente teorema.

Teorema.—Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n números reales no negativos. Se verifica

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

La igualdad es cierta sólo en el caso $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Este teorema afirma que la media aritmética de n números no negativos es mayor que su media geométrica, excepto si los n números son iguales, en cuyo caso coinciden.

Corolario 1. Si $y_1\, y_2 \ldots y_k$ son números reales no negativos, y si $m_1\, m_2 \ldots m_k$ son enteros positivos, se verifica

$$\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_k y_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} \geqslant$$

$$\geqslant \left(y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_k^{m_k}\right)^{\frac{1}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}}$$

Demostración del corolario 1.—Si en el anterior teorema hay m_1 de las a que son iguales a y_1, m_2 de las que son iguales a $y_2, \ldots, m_k$ de las a iguales a y_k, siendo $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$ resulta esta expresión.

Todavía podemos escribirla en la forma

$$\frac{m_1}{n} y_1 + \frac{m_2}{n} y_2 + \ldots + \frac{m_k}{n} y_k \geqslant y_1^{\frac{m_1}{n}}\, y_2^{\frac{m_2}{n}} \ldots y_k^{\frac{m_k}{n}}$$

y si hacemos

$$\frac{m_1}{n} = r_1, \frac{m_2}{n} = r_2, \ldots, \frac{m_k}{n} = r_k$$

resulta una *nueva formulación del corolario*:

Sean $y_1\, y_2 \dots y_k$ números reales *no negativos* y $r_1\, r_2 \dots r_k$ números *racionales positivos*, tales que $r_1 + r_2 + \dots + r_k = 1$. En estas circunstancias se verifica la relación

$$r_1 y_1 + r_2 y_2 + \dots + r_k y_k \geqslant y_1^{r_1} y_2^{r_2} \dots y_k^{r_k}$$

La igualdad es cierta sólo en el caso de que $y_1 = y_2 = \cdot \cdot = y_k$.

Corolario 2.—El corolario anterior se generaliza al caso en que $r_1\, r_2 \dots r_k$ son números reales positivos.

Demostración del corolario 2.—Los números reales se pueden expresar como límites de sucesiones de números racionales

$$r_1 = \lim_{n\to\infty} r_{1n},\; r_2 = \lim_{n\to\infty} r_{2n} \dots r_k = \lim_{n\to\infty} r_{kn}$$

Por el corolario 1 se verifica

$$r_{1n}\, y_1 + r_{2n}\, y_1 + \dots + r_{kn}\, y_k > y_1^{r_{1n}} y_2^{r_{2n}} \dots y_k^{r_{kn}}$$

(No consideramos el caso $y_1 = y_2 = \dots = y_k$ por ser trivial). Tomando límites para $n \to \infty$ resulta

$$r_1 y_1 + r_2 y_2 + \dots + r_k y_k \geqslant y_1^{r_1} y_2^{r_2} \dots y_k^{r_k}$$

es decir, se ha convertido $>$ en $\geqslant$.

Si hacemos

$$\begin{array}{ll} r_1 = r'_1 + r''_1 & r'_1 \text{ racional} \\ r_2 = r'_2 + r''_2 & r'_2 \quad » \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_k = r'_k + r''_k & r'_k \quad » \end{array}$$

resultará

$$y_1^{\frac{r'_1}{r'_1 + \dots + r'_k}} \dots y_k^{\frac{r'_k}{r'_1 + \dots + r'_k}} <$$

$$< \frac{r'_1}{r'_1 + \dots + r'_k} y_1 + \dots + \frac{r'_k}{r'_1 + \dots + r'_k} y_k \qquad [2]$$

equivalente a

$$y_1^{r'_1} \dots\dots y_k^{r'_k} < \left(\frac{r'_1 y_1 + \dots + y'_k y_k}{r'_1 + \dots + r'_k}\right)^{r'_1 + \dots + r'_k} \qquad [2']$$

por la última formulación del corolario 1, puesto que $r'_1\, r'_2 \ldots r_k'$ son números racionales. Por la desigualdad [1], válida para números reales,

$$y_1^{\frac{r''_1}{r''_1 + \ldots + r''_k}} \cdots\cdots y_k^{\frac{r''_k}{r''_1 + \ldots + r''_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r''_1}{r''_1 + \ldots + r''_k} y_1 + \ldots + \frac{r''_k}{r''_1 + \ldots + r''_k} y_k \qquad [3]$$

equivalente a

$$y_1^{r''_1} \cdots\cdots y_k^{r''_k} \leqslant \left(\frac{r''_1 y_1 + \ldots + r''_k y_k}{r''_1 + \ldots + r''_k}\right)^{r''_1 + \ldots + r''_k} \qquad [3']$$

La obtención de la desigualdad que buscamos resulta inmediata, pues basta multiplicar [2'] y [3']

$$y_1^{r_1}\, y_2^{r_2} \cdots\cdots y_k^{r_k} = (y_1^{r'_1}\, y_2^{r'_2} \cdots y_k^{r'_k})\, (y_1^{r''_1}\, y_2^{r''_2} \cdots y_k^{r''_k}) \quad <$$

$$< \left(\frac{r'_1 y_1 + \ldots + r'_k y_k}{r'_1 + \ldots + r'_k}\right)^{r'_1 + \ldots + r'_k} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{r''_1 y_1 + \ldots + r''_k y_k}{r''_1 + \ldots + r''_k}\right)^{r''_1 + \ldots + r''_k}$$

Por la desigualdad [1] se verifica

$$\alpha^{r'}\, \beta^{r''} \leqslant r'\, \alpha + r''\, \beta$$

para números reales no negativos α, β y número reales positivos r' r''. Haciendo

$$\alpha = \frac{r'_1 y_1 + \ldots + r'_k y_k}{r'_1 + \ldots + r'_k} \qquad \beta = \frac{r''_1 y_1 + \ldots + r''_k y_k}{r''_1 + \ldots + r''_k}$$

$$r' = r'_1 + \ldots + r'_k \qquad r'' = r''_1 + \ldots + r''_k$$

queda

$$\left(\frac{r'_1 y_1 + \ldots + r'_k y_k}{r'_1 + \ldots + r'_k}\right)^{r'_1 + \ldots + r'_k}$$

$$\left(\frac{r''_1 y_1 + \ldots + r''_k y_k}{r''_1 + \ldots + r''_k}\right)^{r''_1 + \ldots + r''_k} <$$

$$< (r'_1 y_1 + \ldots + r'_k y_k) + (r''_1 y_1 + \ldots + r''_k y_k)$$

y por lo tanto

$$y_1^{r_1} \ldots y_k^{r_k} = (y_1^{r'_1} \ldots y_k^{r'_k})\,(y_1^{r''_1} \ldots y_k^{r''_k}) \leq$$

$$< \left(\frac{r'_1\, y_1 + \ldots + r'_k\, y_k}{r'_1 + \ldots + r'_k}\right)^{r'_1 + \ldots + r'_k}$$

$$\left(\frac{r''_1\, y_1 + \ldots + r''_k\, y_k}{r''_1 + \ldots + r''_k}\right)^{r''_1 + \ldots + r''_k} \leq$$

$$\leq (r'_1\, y_1 + \ldots + r'_k\, y_k) + (r''_1\, y_1 + \ldots + r''_k\, y_k) = r_1\, y_1 + \ldots + r_k\, y_k$$

Resumiendo:

$$y_1^{r_1} \ldots y_k^{r_k} < r_1\, y_1 + \ldots + r_k\, y_k$$

para números reales positivos, $r_1 \ldots r_k$, cualesquiera y números *reales* no negativos, $y_1 \ldots y_k$. c.q.d.

2. Desigualdad de Hölder.

2.1. *Desigualdad de Hölder para sumas finitas.*

> Sean α, β, ... λ números reales positivos, tales que $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$. Consideremos las n-uplas de números reales no negativos $(a_1\, a_2 \ldots a_n)$ $(b_1\, b_2 \ldots b_n) \ldots (f_1\, l_2 \ldots l_n)$. En estas circunstancias se verifica
>
> $$\sum_{n=1}^{n} a_n^{\alpha}\, b_n^{\beta} \ldots l_n^{\lambda} \leq \left(\sum_{n=1}^{n} a_n\right)^{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{n} b_n\right)^{\beta} \ldots \left(\sum_{n=1}^{n} l_n\right)^{\lambda}$$

Demostración

$$\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n^{\alpha}\, b_n^{\beta} \ldots l_n^{\lambda}}{\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n\right)^{\alpha} \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{n} b_n\right)^{\beta} \ldots \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{n} l_n\right)^{\lambda}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{a_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n}\right)^{\alpha} \left(\frac{b_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} b_n}\right)^{\beta} \ldots \left(\frac{l_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} l_n}\right)^{\lambda} <$$

$$\leq \sum_{n=1}^{n} \left(\alpha \frac{a_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} a_n} + \beta \frac{b_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} b_n} + \ldots + \lambda \frac{j_n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{n} l_n}\right) =$$

por cor. 2

$$= \alpha \sum_{n=1}^{n} \frac{a_n}{\sum\limits_{n=1}^{n} a_n} + \beta \sum_{n=1}^{n} \frac{b_n}{\sum\limits_{n=1}^{n} b_n} + \ldots + \lambda \sum_{n=1}^{n} \frac{l_n}{\sum\limits_{n=1}^{n} l_n} =$$

$$= \alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$$

luego

$$\boxed{\sum_{n=1}^{n} a_n^{\alpha}\, b_n^{\beta} \ldots l_n^{\lambda} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{n} a_n\right)^{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{n} b_n\right)^{\beta} \ldots \left(\sum_{n=1}^{n} l_n\right)^{\lambda}}$$

que constituye la desigualdad de Hölder para sumas finitas.

También puede expresarse

$$\sum_{n=1}^{n} a_n\, b_n \ldots l_n \leqslant \left(\sum_{n=1}^{n} a_n^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{n} b_n^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta} \ldots \left(\sum_{n=1}^{n} l_n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{\lambda}$$

La igualdad se verifica únicamente en dos casos:

1.ª Si para todo i es

$$\frac{a_i}{\sum\limits_{n=1}^{n} a_n} = \frac{b_i}{\sum\limits_{n=1}^{n} b_n} = \ldots = \frac{l_i}{\sum\limits_{n=1}^{n} l_n} = \frac{1}{k}$$

y por lo tanto los vectores $(a_1\, a_2 \ldots a_n)$ $(b_1\, b_2 \ldots b_n) \ldots (l_1\, l_2 \ldots l_n)$ son linealmente dependientes dos a dos.

2.ª También se verifica la igualdad en el caso trivial de que uno de los vectores anteriores es el vector nulo $(0, 0, \ldots 0)$.

2.2. *Generalización a series.*

La desigualdad de Hölder también es válida para el caso de series, pues en el proceso de demostración anterior *no* es esencial la condición de finitud de n, y basta con que las series $\Sigma\, a_n$, $\Sigma\, b_n$, $\ldots$ $\Sigma\, l_n$ sean convergentes.

Nota.—Obsérvese que tanto en el caso de suma finita como en el de serie la condición de validez de la demostración es que sean positivos

$$\frac{a_i}{\Sigma\, a_n}, \frac{b_i}{\Sigma\, b_n}, \ldots, \frac{l_i}{\Sigma\, l_n}$$

para lo cual es suficiente que a_i, b_i, $\ldots$ l_i sean positivos para cualquier valor de i.

2.3. *Generalización a integrales.*

La desigualdad de Hölder se verifica también entre integrales. (Consideramos el concepto de integral de Lebesque, que es más amplio que el de integral de Riemann.)

Teorema.—Sean $f, g, \ldots l$ funciones no negativas; $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ números positivos tales que $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1$. En estas condiciones se verifica (suponiendo, claro está, que las integrales existen) la desigualdad

$$\int f^\alpha g^\beta \ldots l^\lambda \, dx \leqslant \left(\int f \, dx\right)^\alpha \left(\int g \, dx\right)^\beta \ldots \left(\int l \, dx\right)^\lambda$$

La igualdad es cierta solamente si una función es idénticamente nula o bien las funciones $f, g, \ldots l$ son proporcionales dos a dos.

Demostración.—Hemos de demostrar que

$$\frac{\int f^\alpha g^\beta \ldots l^\lambda \, dx}{\left(\int f \, dx\right)^\alpha \left(\int g \, dx\right)^\beta \ldots \left(\int l \, dx\right)^\lambda} < 1$$

cuando ninguna función es nula ni la totalidad $f, g, \ldots l$ son proporcionales dos a dos.

En efecto

$$\frac{\int f^\alpha g^\beta \ldots l^\lambda \, dx}{\left(\int f \, dx\right)^\alpha \left(\int g \, dx\right)^\beta \ldots \left(\int l \, dx\right)^\lambda} =$$

$$= \int \left(\frac{f}{\int f \, dx}\right)^\alpha \left(\frac{g}{\int g \, dx}\right)^\beta \ldots \left(\frac{l}{\int l \, dx}\right)^\lambda dx$$

y para *cualquier* x se verifica

$$\left(\frac{f}{\int f \, dx}\right)^\lambda \left(\frac{g}{\int g \, dx)}\right)^\beta \ldots \left(\frac{l}{\int l \, dx}\right)^\lambda <$$

$$< \frac{\alpha f}{\int f \, dx} + \frac{\beta g}{\int g \, dx} + \ldots + \frac{\lambda l}{\int l \, dx}$$

por el corolario 2.

La desigualdad se mantiene al efectuar la integración en ambos miembros, pues

$$F(x) < \Phi(x) \rightarrow \int F(x) \, dx < \int \Phi(x) \, dx$$

luego

$$\int \left(\frac{f}{\int f\,dx} \right)^{\alpha} \left(\frac{g}{\int g\,dx} \right)^{\beta} \cdots \left(\frac{l}{\int l\,dx} \right)^{\lambda} dx <$$

$$< \int \left(\frac{\alpha f}{\int f\,dx} + \frac{\beta g}{\int g\,dx} + \ldots + \frac{\lambda l}{\int f\,dx} \right) dx =$$

$$= \alpha \int \frac{f}{\int f\,dx}\,dx + \beta \int \frac{g}{\int g\,dx}\,dx + \ldots + \lambda \int \frac{l}{\int l\,dx}\,dx =$$

$$= \alpha + \beta + \ldots + \lambda = 1 \qquad \text{c.q.d.}$$

3. Casos particulares interesantes de la desigualdad de Holder.

3.1. *Caso de dos vectores* $(a_1\, a_2 \ldots a_n)$ $(b_1\, b_2 \ldots b_n)$ *o dos funciones,* f, g

Puede escribirse en la forma

(I) $\Sigma\, a_n{}^{\alpha}\, b_n{}^{\beta} \leqslant (\Sigma\, a_n)^{\alpha}\, (\Sigma\, b_n)^{\beta}$, $\alpha + \beta = 1$.

Si hacemos en esta expresión

$$\alpha = \frac{1}{k}, \; \beta = \frac{1}{k'}$$

resultará

(II) $\Sigma\, a_n^{\frac{1}{k}}\, b_n^{\frac{1}{k}} \leqslant (\Sigma\, a_n)^{\frac{1}{k}}\, (\Sigma\, b_n)^{\frac{1}{k}}$, $\quad \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k'} = 1$

Si en las expresiones (I) y (II) hacemos el cambio

$$\mathrm{A}_n = a_n{}^{\alpha} = a_n^{\frac{1}{k}} \quad ; \quad \mathrm{B}_n = b_n{}^{\beta} = b_n^{\frac{1}{k'}}$$

resultará

(III) $\Sigma\, \mathrm{A}_n\, \mathrm{B}_n < \left(\Sigma\, \mathrm{A}_n^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha} \left(\Sigma\, \mathrm{B}_n^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\beta} \quad \alpha + \beta = 1$

$$\text{(IV)} \qquad \Sigma\, A_n\, B_n \leqslant (\Sigma\, A_n^{k})^{\frac{1}{k}} \, (\Sigma\, B_n^{k'})^{\frac{1}{k'}} \quad ; \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \qquad 1 < k < \infty$$

Esta última expresión es la que se usa con más frecuencia.
En forma integral, la expresión (IV) se escribe

$$\text{(IV)}' \qquad \int f\, g\, dx \leqslant \left(\int f^{k}\, dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int g^{k'}\, dx\right)^{\frac{1}{k'}} \quad ; \quad \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \qquad 1 < k < \infty$$

3.2. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.*

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene haciendo

$$k = k' = \frac{1}{2}$$

en las expresiones (IV) y (IV)′

$$\Sigma\, A_n\, B_n \leqslant (\Sigma\, A_n^{2})^{\frac{1}{2}} \, (\Sigma\, B_n^{2})^{\frac{1}{2}}$$

$$\int f\, g\, dx \leqslant \left(\int f^{2}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^{2}\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es costumbre escribirla elevando al cuadrado

$$(\Sigma\, A_n\, B_n)^2 \leqslant (\Sigma\, A_n^{2})\, (\Sigma\, B_n^{2})$$

$$\left(\int f\, g\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int f^{2}\, dx\right) \left(\int g^{2}\, dx\right)$$

3.3. *Desigualdad de Hölder para números y funciones de signo cualquiera.*

La desigualdad de Hölder, si la escribimos en forma de suma (finita o infinita), requiere la condición de que los $(a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots)$ $(b_1\, b_2 \ldots$ $\ldots b_n \ldots) \ldots (l_1\, l_2 \ldots l_n \ldots)$ sean números *no negativos*; y si la escribimos en forma de integral, requiere que sean *no negativas* las funciones $f, g, \ldots l$, en el dominio de integración que se considere. Podemos efectuar una generalización a cualquier conjunto de números o funciones sin necesidad de imponer que sean no negativos, considerando valores absolutos.

Por ejemplo, los casos particulares de los puntos 3.1 y 3.2 pueden escribirse

$$\Sigma\, |A_n\, B_n| \leqslant (\Sigma\, |A_n|^k)^{\frac{1}{k}} \quad (\Sigma\, |P_n)^{k'})^{\frac{1}{k'}}$$

$$\int |f(x)\, g(x)|\, dx \leqslant (\int |f(x)|^k\, dx)^{\frac{1}{k}} \quad (\int |g(x)|^{k'})^{\frac{1}{k'}}$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$$

$$1 < k < \infty$$

La primera desigualdad nos indica que también es válida para números complejos, pues si $a_1, a_2, \ldots a_n$, y $b_1, b_2 \ldots b_n$ son complejos se verifica

$$|\Sigma\, a_n\, b_n| \leqslant \Sigma\, |a_n\, b_n| = \Sigma\, |a_n|\, |b_n| \leqslant$$

$$\leqslant (\Sigma\, |a_n|^k)^{\frac{1}{k}} \quad (\Sigma\, |b_n|^{k'})^{\frac{1}{k'}}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se escribirá

$$(\Sigma\, |a_n\, b_n|)^2 \leqslant (\Sigma\, |a_n|^2)\, (\Sigma\, |b_n|^2)$$

$$(\int |f(x)\, g(x)|\, dx)^2 \leqslant (\int |f(x)^2\, dx)\, (\int |g(x)^2\, dx)$$

II. DESIGUALDAD DE MINKOWSKI

1. Desigualdades previas.

En el apartado I-3.1 hemos visto que

$$\Sigma\, a_n\, b_n \leqslant (\Sigma\, a_n^k)^{\frac{1}{k}} \quad (\Sigma\, b_n^{k'})^{\frac{1}{k'}} \quad \text{para } \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$$

$$1 < k < \infty$$

Vamos a demostrar que *cuando* $k < 1$ se verifica

$$\boxed{\Sigma\, a_n\, b_n > (\Sigma\, a_n^k)^{\frac{1}{k}} (\Sigma\, b_n^{k'})^{\frac{1}{k'}}}$$

Supongamos que sea $0 < k < 1$, ya que el caso $k < 0$ implica $0 < < k' < 1$ y por lo tanto se reduce al anterior dada la simetría existente entre k y k'.

Sea entonces $0 < k < 1$.

Haciendo

$$l = \frac{1}{k}$$

resulta $l > 1$. Si $u_n = (a_n\, b_n)^k$ $v_n = b_n^{-k}$ resultará $u_n\, v_n = a_n^k$.

$$\Sigma\, u_n\, v_n \leqslant (\Sigma\, u_n^l)^{\frac{1}{l}} (\Sigma\, v_n^{l'})^{\frac{1}{l'}}$$

o sea

$$\Sigma\, a_n^k \leqslant (\Sigma\, (a_n\, b_n)^{lk})^{\frac{1}{l}} (\Sigma\, b_n^{-lk'})^{\frac{1}{l'}}$$

Como

$$l = \frac{1}{k}$$

por definición se verifica

$$lk = 1, \; -l'k = k' \left(\text{pues} \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{k} - \frac{1}{kl'} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{l'}\right) = \frac{1}{kl} = 1\right),$$

luego la anterior expresión se transforma en

$$\Sigma\, a_n^k \leqslant (\Sigma\, a_n\, b_n)^k\, (\Sigma\, b_n^{k'})^{1-k}$$

Elevando a $\dfrac{1}{k}$

$$(\Sigma\, a_n{}^k)^{\frac{1}{k}} \leqslant (\Sigma\, a_n\, b_n)\, (\Sigma\, b_n{}^{k'})^{\cancel{\frac{1}{k}}\; -\frac{1}{k'}}$$

o sea

$$(\Sigma\, a_n\, b_n) \geqslant (\Sigma\, a_n{}^k)^{\frac{1}{k}} \quad (\Sigma\, b_n{}^{k'})^{\frac{1}{k'}} \qquad \text{c.q.d.}$$

Como siempre, la igualdad sólo se verifica en el caso de proporcionalidad de $(a_n{}^k)$ y $(b_n{}^{k'})$.

Resumiendo

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } \; 1 < k < \infty \rightarrow \Sigma\, a_n\, b_n \leqslant (\Sigma\, a_n{}^k)^{\frac{1}{k}} \; (\Sigma\, b_n{}^{k'})^{\frac{1}{k'}} \\ \text{Si } \; k < 1 \qquad\quad \rightarrow \Sigma\, a_n\, b_n > (\Sigma\, a_n{}^k)^{\frac{1}{k}} \; (\Sigma\, b_n{}^{k'})^{\frac{1}{k'}} \end{array}}$$

Las desigualdades análogas para integrales son

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Si } \; 1 < k < \infty \rightarrow \int f\, g\, dx \leqslant (\int f^k\, dx)^{\frac{1}{k}} \; (\int g^{k'}\, dx)^{\frac{1}{k'}} \\ \text{Si } \; k < 1 \qquad\quad \rightarrow \int f\, g\, dx > (\int f^k\, dx)^{\frac{1}{k}} \; (\int g^{k'}\, dx)^{\frac{1}{k'}} \end{array}}$$

(Caso de igualdad cuando f^k y $g^{k'}$ son proporcionales o fg nulo.)

2. Desigualdad de Minkowski. Sumas.

2.1. *Proposición.* Si $r > 1$, $q_1 \dots q_n$ son números reales y

$$\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = 1$$

se verifica

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\, a_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\, b_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} + \dots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\, l_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} >$$

$$> \left[\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\,(a_\nu + b_\nu + \dots + l_\nu)^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

para $(a_1\, a_2 \dots a_n)$ $(b_1\, b_2 \dots b_n) \dots (l_1\, l_2 \dots l_n)$ números reales no negativos.

En efecto, sea

$$S^r = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\,(a_\nu + b_\nu + \dots + l_\nu)^r = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\,(a_\nu + \dots + l_\nu)^{r-1} a_\nu +$$

$$+ \dots + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\,(a_\nu + \dots + l_\nu)^{r-1}\, l_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu\, q_\nu^{\frac{1}{r}}\right)\left[(a_\nu + \dots + l_\nu)\, q_\nu^{\frac{1}{r}}\right]^{-1} + \dots +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \left(l_\nu\, g_\nu^{\frac{1}{r}}\right)\left[(a_\nu + \dots + l_\nu)\, q_\nu^{\frac{1}{r}}\right]^{-1}$$

A cada suma-sumando le aplicamos la desigualdad (IV) del I-3.1 y resulta

$$S^r < \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^r\, q_\nu\right)^{\frac{1}{r}} \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \dots l_\nu)^{r'}\, q_\nu\right)^{\frac{1}{r'}}}_{\parallel \atop S^{r-1}} + \dots +$$

$$+ \left(\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^r \, q_\nu \right)^{\frac{1}{r}} \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \ldots + l_\nu)^{r'} \, q_\nu \right)^{\frac{1}{r'}}}_{\substack{/\!/ \\ S^{r-1}}} =$$

$$= S^{r-1} \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \, a_\nu^r \right)^{\frac{1}{r}} + \ldots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \, l_\nu^r \right)^{\frac{1}{r}} \right]$$

$$S = \boxed{ \left[\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu (a_\nu + \ldots + l_\nu)^r \right]^{\frac{1}{r}} < \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \, a_\nu^r \right)^{\frac{1}{1}} + \ldots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \, l_\nu^r \right)^{\frac{1}{r}} }$$

c.q.d.

Se verificaría la igualdad si $(a_1 \ldots a_n)$ $(b_1 \ldots b_n)$ $\ldots$ $(l_1 \ldots l_n)$ fuesen proporcionales dos a dos.

Si hacemos

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}$$

resulta la desigualdad de Minkowski propiamente dicha

$$\boxed{ \left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \ldots + l_\nu)^r \right)^{\frac{1}{r}} < \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^r \right)^{\frac{1}{r}} + \ldots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^r \right)^{\frac{1}{r}} }$$

2.2. *Proposición.*—En las mismas condiciones que el apartado anterior si $r < 1$ se verifica

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu (a_\nu + \dots + l_\nu)^r\right)^{\frac{1}{r}} > \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu a_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} + \dots +$$

$$+ \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu l_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Vamos a considerar dos casos:

1.° $O < r < 1$. Se verifica

$$(S_1 S_2 \dots S_n) \neq (O, O, \dots O)$$

a menos que $(a_1 a_2 \dots a_n) = \dots = (l_1 l_2 \dots l_n) = (O\, O \dots O)$ pues $(S_\nu = a_\nu + b_\nu + \dots + l_\nu \quad \nu = 1, 2, \dots n.$

Consideramos $S_\nu > O$, pues si $S_\nu = O$ sería $a_\nu = b_\nu = \dots = l_\nu = O$ y se podrían eliminar los $a_\nu, b_\nu, \dots l_\nu$, correspondientes y por lo tanto el S_ν.

La demostración es análoga al apartado anterior, pero aplicando a cada suma-sumando de S^r la desigualdad deducida en II-1. Resulta

$$S^r > \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu a_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \dots + l_\nu)^{r'} q_\nu\right)^{\frac{1}{r'}}}_{S^{r-1}} + \dots +$$

$$+ \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu l_\nu^r\right)^{\frac{1}{r'}} \underbrace{\left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \dots + l_\nu)^{r'} q_\nu\right)^{\frac{1}{r'}}}_{S^{r-1}} =$$

$$= S^{r-1} \left[\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu a_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} + \dots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu l_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]$$

o sea

$$\boxed{S = \left[\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu (a_\nu + \ldots + l_\nu)^r\right]^{\frac{1}{r}} > \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu a_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} + \ldots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu l_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}}}$$

c.q.d.

2.º Si $r < 0$, para que las expresiones tengan sentido ha de admitirse que todos los números $(a_1 \ldots a_n)$ $(b_1 \ldots b_n) \ldots (l_1 \ldots l_n)$ son positivos (o sea, *ninguno es nulo*), y se puede aplicar la misma demostración anterior. Si hacemos

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}$$

resulta

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \ldots + l_\nu)^r\right)^{\frac{1}{r}} > \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} + \ldots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

Nota.—Puede parecer que la expresión de 2.1 o de 2.2 es más general que la obtenida al hacer

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = \frac{1}{n}$$

No es así, pues de las expresiones

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + \ldots + l_\nu)^r\right)^{\frac{1}{r}} \gtrless \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} + \ldots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} l_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

se pueden deducir 2.1 y 2.2 sin más que sustituir a_i por

$$a_i\, p_i^{\frac{1}{r}} \;;\; b_i \text{ por } b_i\, p_i^{\frac{1}{r}} \text{, etc.}$$

Evidentemente, las mismas desigualdades anteriores son válidas cuando se sustituyen las sumas por series convergentes.

3. DESIGUALDAD DE MINKOWSKI. INTEGRALES.

3.1. *Proposición.*

$$\text{Si } k > 1 \rightarrow \left(\int (f + g + \ldots + l)^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} <$$

$$< \left(\int f^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} + \ldots + \left(\int l^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}}$$

a menos que las funciones $f_1\, g_1 \ldots l$ sean proporcionales dos a dos.

Esta desigualdad es un caso particular de la desigualdad más general.

3.2. *Proposición.*

$$\text{Si } k > 1 \rightarrow \left[\int (\Sigma\, f_m(x))^k \, dx\right]^{\frac{1}{k}} < \Sigma \left[\int f_m{}^k(x)\, dx\right]^{\frac{1}{k}}$$

a menos que $f_m(x) = C_m\, \Phi(x)$. La suma puede ser serie.

Por lo tanto, vamos a demostrar esta segunda desigualdad. Necesitamos para ello aplicar el siguiente

Lema.—Si $k > 1$ es condición necesaria y suficiente para que $\int f^k \, dx \leqslant F$, que se verifique

$$\int fg \, dx \leqslant F^{\frac{1}{k}} \; G^{\frac{1}{k}}$$

para todo g, tal que $\int g^{k'} \, dx \leqslant G$.

Demostración del lema.—Es evidente que la condición es *necesaria*, pues reproduce la desigualdad del apartado II-1.

Supuesto que $\int f^k \, dx$ es finita, consecuencia de una proposición que dice que

$$\left.\begin{matrix} fg \in L \\ g \in L^{k'} \end{matrix}\right\} \rightarrow f \in L^k$$

vamos a demostrar la *suficiencia* por reducción al absurdo.

Resulta que si se supone $\int f^k\,dx > F$ llegamos a una contradicción, pues elegimos $g^{k'}$ proporcional a f^k, y por II-1 resultaría

$$\int fg\,dx = \left(\int f^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int g^{k'}\,dx\right)^{\frac{1}{k'}} > F^{\frac{1}{k}}\ G^{\frac{1}{k'}}$$

si hacemos $G = \int g^{k'}\,dx$.

Esto contradice la hipótesis, luego hemos concluido.

Haciendo uso del lema que acabamos de demostrar, vamos a deducir la desigualdad 3.2. Elegimos g tal que $\int g^{k'}\,dx \leqslant 1$ y resultará en virtud del lema

$$\left.\begin{array}{l} \int fg\,dx \leqslant F^{\frac{1}{k}} \\ \int g^{k'}\,dx \leqslant 1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \int f^k\,dx \leqslant F$$

o bien

$$\left.\begin{array}{l} \int(\Sigma f_m(x)\ )\ g\,dx \leqslant M \\ \int g^{k'}\,dx \leqslant 1 \end{array}\right\} \longleftrightarrow \int (\Sigma f_m)x)^k\,dx \leqslant M^k$$

$$\int(\Sigma f_m(x)\ g\,dx = \Sigma \int f_m(x)\,g(x)\,dx \underset{(1)}{<} \Sigma \left(\int f_m{}^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int g^{k'}\,dx\right)^{\frac{1}{k'}} \underset{(2)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \Sigma \left(\int f_m{}^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}}$$

(1) Si $k > 1 \rightarrow \int f_m\,g\,dx < \left(\int f_m{}^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int g^{k'}\,dx\right)^{\frac{1}{k'}}$

(desigualdad del apartado II-1).

(2) Por suponer $\int g^{k'}\,dx \leqslant 1$.

Si hacemos

$$M = \Sigma \left(\int f_m{}^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}}$$

resultará

$$\int(\Sigma f_m(x)\ )^k\,dx \leqslant \left(\Sigma \left(\int f_m{}^k\,dx\right)^{\frac{1}{k}}\right)^k \qquad \text{c.q.d.}$$

3.3. *Proposición.*

$$\text{Si } 0 < k < 1 \text{ ó } k < 0 \Rightarrow \left(\int (f + g + \ldots + l)^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} > \left(\int f^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} + \ldots + \left(\int l^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}}$$

a menos que $f_1 \, g_1 \ldots l$ sean proporcionales.

Supongamos $0 < k < 1$. Sea $S = f + g + \ldots + l$ $\int S^k \, dx = \int S^{k-1} (f + g + \ldots + l) \, dx = \int S^{k-1} f \, dx + \ldots + \int S^{k-1} l \, dx$.

Existe un teorema que asegura que

$$\Sigma a < (\Sigma a^k)^{\frac{1}{k}} \longleftrightarrow (\Sigma a)^k < \Sigma a^k$$

por lo tanto

$$S^k = (f + g + \ldots + l)^k \leqslant f^k + g^k + \ldots + l^k$$

$$\left.\begin{array}{l} \int f \, S^{k-1} \, dx > \left(\int f^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int S^k \, dx\right)^{\frac{1}{k'}} \\ \int g \, S^{k-1} \, dx > \left(\int g^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int S^k \, dx\right)^{\frac{1}{k'}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int l \, S^{k-1} \, dx > \left(\int l^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int S^k \, dx\right)^{\frac{1}{k'}} \end{array}\right| \text{ (desigualdad de II.1)}$$

Sumando miembro a miembro

$$\int S^k \, dx > \left[\left(\int f^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\int g^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}} + \ldots + \left(\int l^k \, dx\right)^{\frac{1}{k}}\right] \left(\int S^k \, dx\right)^{\frac{1}{k'}}$$

Dividiendo ambos miembros por

$$\left(\int S^k \, dx\right)^{\frac{1}{k'}}$$

(que es finito y positivo) resulta

$$(\int S^k\,dx)^{\frac{1}{k}} > (\int f^k\,dx)^{\frac{1}{k}} + (\int g^k\,dx)^{\frac{1}{k}} + \ldots + (\int l^k\,dx)^{\frac{1}{k}}$$

c.q.d.

Se verificaría la igualdad si $f_1\, g_1 \ldots l$ son proporcionales dos a dos.

Si $k < 0$ es válido el mismo razonamiento con tal de que $\int S^k\,dx$ sea finito.

Epílogo.—Consideramos que esta exposición simplificada puede ser útil, sin necesidad de acudir a la primera obra de la bibliografía, para comprender el esquema deductivo de las desigualdades tantas veces usadas en análisis matemático.