# SOBRE UNA CARACTERIZACION DE LOS ESPACIOS RESOLUBLES

por

J. M. Sanz Serna

Es sabido ([1] pág. 92) que un espacio topológico X se llama resoluble si existen en X dos subconjuntos complementarios densos por doquier. En esta nota caracterizamos tales espacios mediante el siguiente teorema:

*Teorema*

Sea X un espacio topológico. Es condición necesaria y suficiente para que X sea resoluble que para cada subconjunto cerrado $F \subset X$ exista un subconjunto $H \subset X$ tal que $F = Fr\, H$.

*Demostración*

Supongamos, en primer lugar, que se verifica la condición dada. En particular, debe existir un subconjunto $Q \subset X$, tal que

$$Fr\, Q = \overline{Q} \cap \overline{\complement Q} = X$$

es decir, $\overline{Q} = \overline{\complement Q} = X$, por lo que $Q$ y $\complement Q$ son densos por doquire y X es resoluble.

Recíprocamente, supongamos que X es resoluble, siendo $Q$ y $\complement Q$ subconjuntos de X densos por doquier. Si $F \subset X$ es un cerrado arbitrario, vamos a comprobar que F es la frontera de:

$$H = Fr\, F \cup (\mathring{F} \cap Q) = (Fr\, F \cup \mathring{F}) \cap (Fr\, F \cup Q) = F \cap (Fr\, F \cup Q)$$

Calculemos primero $\overline{H}$. Se verifica:

$$\overline{H} = \overline{Fr\, F \cup (\mathring{F} \cap Q)} = \overline{Fr\, F} \cup \overline{(\mathring{F} \cap Q)} = Fr\, F \cup \overline{(\mathring{F} \cap Q)}$$

Ahora bien, si A es un abierto de un espacio topológico X y $B \subset X$ se tiene que $\overline{A \cap B} \supset A \cap \overline{B}$ ([1] pág. 7), luego al ser $\mathring{F}$ abierto:

$$\overline{H} \supset Fr\,F \cup (\mathring{F} \cap \overline{Q}) = Fr\,F \cup \mathring{F} = \overline{F} = F$$

Por otra parte, $H \subset F$ y, por consiguiente, $\overline{H} \subset \overline{F} = F$, deduciéndose $\overline{H} = F$.

Calculemos seguidamente $\overline{\complement H}$

$$\overline{\complement H} = \overline{\complement(F \cap (Fr\,F \cup Q))} = \overline{\complement F \cup (\complement\, Fr\,F \cap \complement Q)} = \overline{\complement F} \cup \overline{(\complement\, Fr\,F \cap \complement Q)}$$

Aplicando de nuevo el resultado citado con $A = \complement\, Fr\,F$, $B = \complement Q$ se implica:

$$\overline{\complement H} \supset \overline{\complement F} \cup (\complement\, Fr\,F \cap \complement \overline{Q}) = \complement \overline{F} \cup \complement\, Fr\,F = \complement \mathring{F} \cup \complement\, Fr\,F =$$

$$= \complement(\mathring{F} \cap Fr\,F) = X$$

Se sigue $\overline{\complement H} = X$, y, finalmente,

$$Fr\,H = \overline{H} \cap \overline{\complement H} = F \cap X = F \qquad \text{c.q.d.}$$

## BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, *Eléments de Mathematique. Topologie Générale*, tomo primero, Hermann, París, 1971.