ALGUNAS CONSECUENCIAS ELEMENTALES DEL TEOREMA DE WEIERSTRASS

por

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

1. Vamos a establecer algunos resultados elementales sobre las funciones continuas a través del teorema de aproximación de Weierstrass, utilizando la versión de Bernstein.

Teorema 1 (Weierstrass). Si $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ función continua, puede ser aproximada uniformemente por polinomios, esto es $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ y $\exists\ P_n(x) : \forall n > n(\varepsilon)$ y $\forall x \in [0, 1]$ $|f_n(x) - P_n(x)| < \varepsilon$.

Demostración. Ver [1], páginas 166-167.

2. Veamos un proceso constructivo de estos polinomios de aproximación de f, debida a S. Bernstein.

Definición 2.1. Se llama polinomio de grado n de Bernstein de f al polinomio definido como sigue:

$$\forall x \in [0, 1],\ Bn(f)\ (x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k\ (1 - x)^{n-k} \tag{1}$$

En [1], páginas 166-167, se demuestra con detalle que la sucesión de los polinomios de Benstein convergen uniformemente hacia f en [0, 1].

Prop. 2.2. Si $f:[0, 1] \to \mathbf{R}$ continua, entonces

a) $$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)}{2^n}$$

b) $$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{n+1}$$

Demostración

a) Por el teorema de Weierstrass, $B_n(f) \to f$ uniformemente en [0,1]. En particular, converge puntualmente en [0,1]. De aquí

$$f(^1/_2) = \lim_{n\to\infty} B_n(f)(^1/_2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)}{2^n}$$

b) Sabemos, por el teorema de Weierstrass

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f) = f$$

uniformemente. Entonces

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} B_n(f) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 B_n(f) = \int_0^1 f\,dx$$

Ahora, sustituyendo, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 (1-x)^{n-k} x^k\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 x^{k+1-1} (1-x)^{n-k+1-1}\,dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{B}(n-k+1,\, k+1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(n-k+1+k+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-k)!\,k!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-k)!\,k!}{(n+1)\;n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{\binom{n}{k}}\;\frac{1}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{n+1}$$

y la proposición queda demostrada.

BIBLIOGRAFIA

[1] *Cálculo infinitesimal,* J. Dieudonne.