SOBRE LA AXIOMATICA DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

por

JUAN RAMON RUIZ TOLOSA

PROLOGO

Dentro del Algebra Abstracta, se entiende por estructura un conjunto de entes que gozan de determinadas propiedades; algunas de ellas, según los autores, son elegidas como axiomas formales para definir la propia estructura y el resto, pasan a ser propiedades «deducibles» de los primeros.

Este escrito prueba, que bajo este punto de vista, la axiomática clásica de la estructura «espacio vectorial», es reducible a una axiomatica más estricta, definiendo dicha estructura con tres axiomas menos que la primera.

AXIOMÁTICA CLÁSICA DE ESPACIO VECTORIAL

Concluyendo las definiciones que en diversas obras consultadas he podido observar para la estructura «Espacio Vectorial», y prescindiendo, para simplificar, de la distinción entre espacio vectorial «a la izquierda» o «a la derecha», se puede afirmar que la axiomática, salvo pequeñas diferencias de forma, clásicamente utilizada para definir tal estructura, es la siguiente:

1.º Un conjunto E, de entes ($\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$, . . ., $\bar{X}$, $\bar{Y}$), llamados vectores, está dotado de una ley de composición interna, que notificamos con el signo $+$, tal que:

$$\forall\ \bar{U}, \bar{V} \in E \longrightarrow \bar{U} + \bar{V} = \bar{X}\ ;\ \bar{X} \in E$$

2.º Esta ley interna es asociativa:

$$\forall\ \bar{U}, V, \bar{W} \in E \longrightarrow (\bar{U} + \bar{V}) + \bar{W} = \bar{U} = (\bar{V} + \bar{W})$$

3.º Esta ley interna es unitaria:

$$\forall\ \bar{V} \in \exists, E\ \bar{0} \in E \longrightarrow \bar{V} + \bar{0} = \bar{V}$$

4.º Esta ley interna es cancelativa:

$$\forall\ \overline{V} \in E,\ \exists\ (-\overline{V}) \in E \longrightarrow \overline{V} + (-\overline{V}) = \overline{0}$$

5.º Esta ley interna es abeliana:

$$\forall\ \overline{U}, \overline{V} \in E \longrightarrow \overline{U} + \overline{V} = \overline{V} + \overline{U}$$

6.º Dado otro conjunto K, de entes (λ, μ, ρ, ..., 0, ε), llamados escalares, que está estructurado según un *cuerpo conmutativo* por las leyes de composición «+» y « », de neutros respectivos «o» y «ε», existe una ley de composición externa, notificada «o», que hace corresponder a cada par escalar-vector otro vector de forma que:

$$\forall\ \lambda \in K \quad y \quad \forall\ \overline{V} \in E, \longrightarrow q_0\, \overline{V} = \overline{W} \quad ; \quad \overline{W} \in E$$

7.º Esta ley externa es distributiva respecto de la suma de escalares:

$$\forall\ \lambda, \mu \in K \quad y \quad \forall\ \overline{V} \in E \longrightarrow (\lambda + \mu)_0\, \overline{V} = \lambda_0\, \overline{V} + \mu_0\, \overline{V}$$

8.º Esta ley externa es distributiva respecto de la suma de vectores:

$$\forall\ \lambda \in K \quad y \quad \forall\ \overline{U}, \overline{V} \in E \longrightarrow \lambda_0\, (\overline{U} + \overline{V}) = \lambda_0\, \overline{U} + \lambda_0\, \overline{V}$$

9.º Esta ley externa es asociativa respecto al producto de los escalares:

$$\forall\ \lambda, \mu \in K, \quad y \quad \forall\ \overline{V} \in E \longrightarrow \lambda_0\, (\mu_0\, \overline{V}) = (\lambda_0\, \mu)_0\, \overline{V}$$

10.º Esta ley externa es unitaria, con neutro el del producto en el cuerpo:

$$\forall\ \overline{V} \in E, \longrightarrow \varepsilon_0\, \overline{V} = \overline{V}$$

Seguidamente, la bibliografía sobre el citado tema se dedica a poner ejemplos de esta estructura, a demostrar propiedades deducidas de las leyes formales y, en general, a desarrollar toda su teoría.

Las leyes de composición de los «espacios vectoriales» son suprayectivas

Es curioso observar como siempre que se habla de aplicaciones, los textos clasifican inmediatamente si son inyectivas, suprayectivas, etc., sin embargo, al proponer en la axiomática de las estructuras, leyes de composición, que en el fondo son aplicaciones, nada se dice al respecto.

Para proceder posteriormente con comodidad, propongo y demuestro previamente el siguiente teorema:

Teorema I. «En todo espacio vectorial, es condición necesaria que las leyes de composición interna y externa sean suprayectivas.»

Demostración:

a) $\forall\ \overline{W} \longrightarrow \overline{W} = \overline{W} + \overline{0}$; $\exists\ \overline{V} \neq \overline{W}$, tal que $\overline{0} = (-\overline{V}) + \overline{V}$; sustituyendo la segunda en la primera, queda: $\overline{W} = \overline{W} + [(-\overline{V}) + \overline{V}] \longrightarrow \overline{W} = [\overline{W} + (-\overline{V})] + \overline{V} \longrightarrow \overline{W} = \overline{U} + \overline{V}$. Es decir, $\forall\ \overline{W} \longrightarrow \overline{W} = \overline{U} + \overline{V}$. Luego *la ley «+» es suprayectiva.*

b) $\forall\ \overline{W}$, $\overline{W} = \varepsilon_0\, \overline{W}$; $\exists\ \lambda \in K$, tal que $\lambda \cdot \lambda^{-1} = \varepsilon$. Sustituyendo en la anterior: $\overline{W} = (\lambda \cdot \lambda^{-1})_0\, \overline{W} \longrightarrow \overline{W} = \lambda_0\, (\lambda^{-1}{}_0\, \overline{W}) \longrightarrow \overline{W} = \lambda_0\, \overline{V}$. Es decir, $\forall\ \overline{W} \longrightarrow \overline{W} = \lambda_0\, \overline{V}$. Luego *la ley «o» es suprayectiva.*

Sobre la axiomática estricta

Vista la necesidad, cuando se quiera estructurar un conjunto según espacio vectorial, de elegir previamente una ley de composición externa suprayectiva, vamos a probar que es tan fecunda esta condición, que tomada como axioma, conjuntamente con los 1.º, 2.º, 3.º, 6.º, 7.º, 8.º y 9.º, de un espacio vectorial, supone obligadamente los 4.º, 5.º y 10º.

Teorema II. «Todo conjunto E de entes que cumplan las *seis* condiciones que a continuación se detallan, es un Espacio Vectorial.»

1.º Existe una ley de composición interna, notificada «+» y definida en E, tal que $\forall\ \overline{U}, \overline{V} \in E \longrightarrow \overline{U} + \overline{V} = \overline{W}$; $\overline{W} \in E$.

2.º Esta ley es asociativa:

$$\forall\ \overline{U}, \overline{V}, \overline{W} \in E \longrightarrow (\overline{U} + \overline{V}) + \overline{W} = \overline{U} + (\overline{V} + \overline{W})$$

3.º Esta ley es unitaria: Existe un vector, notificado $\overline{0}$, en el conjunto E, tal que compuesto con cualquier

$$\overline{V} \in E \longrightarrow \overline{V} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{V} = \overline{V}$$

(Hasta aquí tenemos un semigrupo unitario. Consideremos, demás, el cuerpo conmutativo K, ya citado, con la misma notación para sus leyes de composición y sus neutros.)

Existe una ley de composición externa *suprayectiva*, notificada «o» tal que

$$\forall\ \lambda \in K \quad y \quad \forall\ \overline{V} \in E \longrightarrow \lambda_0\, \overline{V} = \overline{W};\ \overline{W} \in E$$

5.º Esta ley externa es asociativa respecto al producto de escalares

$$\forall\ \lambda, \mu \in K \quad y \quad \forall\ \overline{V} \in E \longrightarrow \lambda_0\, (\mu_0\, \overline{V}) = (\lambda_0\, \mu)_0\, \overline{V}$$

6.º Esta ley externa es distributiva.

a) Respecto de la suma de escalares:

$$\forall\ \lambda,\ \mu \in K \quad y \quad \forall\ \overline{V} \in E \longrightarrow (\lambda + \mu)_0\ \overline{V} = \lambda_0\ \overline{V} + \mu_0\ \overline{V}$$

b) Respecto de la suma interna definida en el apartado 1.º:

$$\forall\ \lambda \in K \quad y \quad \forall\ \overline{U}, \overline{V} \in E \longrightarrow \lambda_0\ (\overline{U} + \overline{V}) = \lambda_0\ \overline{U} = \lambda_0$$

Aceptada esta axiomática, vamos a deducir, como propiedades I, II, III de esta estructura, los axiomas números 10.º, 4.º y 5.º de los espacios vectoriales, demostrando así el teorema II.

Propiedad I. (Axioma 10.º del E. V.) La ley externa es unitaria. Su neutro es el neutro del producto de escalares (ε). En efecto: $\forall\ \overline{W} \longrightarrow$ $\longrightarrow \overline{W} = \lambda_0\ \overline{V}$ (por suprayectividad); examinemos la imagen de $\varepsilon_0\ \overline{W}$;

$\varepsilon_0\ \overline{W} = \varepsilon_0\ (\lambda_0\ \overline{V}) = (\varepsilon \cdot \lambda)_0\ \overline{V} = \lambda_0\ \overline{V} = \overline{W} / / \forall\ \overline{W},\ \varepsilon_0\ \overline{W} = \overline{W}$ l.q.q.d.

Propiedad II. (Axioma 4.º del E. V.) La ley interna es cancelativa. Es decir, para la suma, todo elemento de E tiene su opuesto. En efecto: dado que existe «ε», existe «$-\varepsilon$».

Si notificamos al vector $(-\varepsilon)_0\ \overline{V} = (-\overline{V})$, tenemos: $\forall\ \overline{V}$, es

$$\overline{V} + (-\overline{V}) = \varepsilon_0\ \overline{V} + (-\varepsilon)_0\ \overline{V} = [\varepsilon + (-\varepsilon)]_0\ \overline{V} = o_0\ \overline{V} = \overline{0}$$

$$(-\overline{V}) + \overline{V} = (-\varepsilon)_0\ \overline{V} + \varepsilon_0\ \overline{V} = [(-\varepsilon) + \varepsilon[_0\ \overline{V} = o_0\ \overline{V} = \overline{0}$$

Como la imagen de ambas composiciones es la misma, resulta que $\forall\ \overline{V} \in \exists,\ E\ (-\overline{V}) \in E$, tal que $\overline{V} + (-\overline{V}) = (-\overline{V}) + \overline{V} = \overline{0}$ l.q.q.d.

Además, el elemento opuesto a cada elemento es único, pues si hubiera dos distintos $(-\overline{V}_1) \neq (-\overline{V}_2)$, sería

$$(-\overline{V}_1) + \overline{V} + (-\overline{V}_2) = [(-\overline{V}_1) + \overline{V}] + (-\overline{V}_2) = \overline{0} + (-\overline{V}_2) = (-\overline{V}_2)$$

$$(-\overline{V}_1) + \overline{V} + (-\overline{V}_2) = (-\overline{V}_1) + [\overline{V} + (-\overline{V}_2)] = (-\overline{V}_1) + \overline{0} = (-\overline{V}_1),$$

de donde se deduce $(-V_1) = (-V_2)$, lo cual es absurdo.

Propiedad III. (Axioma 5.º del E. V.) La ley interna es abeliana. Vamos a examinar la imagen de $(\varepsilon + \varepsilon)_0\ (\overline{V} + \overline{W})$, $\forall\ \overline{V}, \overline{W}$:

a) Distribuyendo escalares: $(\varepsilon + \varepsilon)_0\ (\overline{V} + \overline{W}) = \varepsilon_0\ (\overline{V} + \overline{W}) + \varepsilon_0\ (\overline{V} +$ $+ \overline{W}) = (\overline{V} + \overline{W}) + (\overline{V} + \overline{W}) = \overline{V} + (\overline{W} + \overline{V}) + \overline{W}.$

b) Distribuyendo primero vectores y luego escalares: $(\varepsilon + \varepsilon)_0 (\overline{V} + \overline{W}) = (\varepsilon + \varepsilon)_0 \overline{V} + (\varepsilon + \varepsilon)_0 \overline{W} = \varepsilon_0 \overline{V} + \varepsilon_0 \overline{V} + \varepsilon_0 \overline{W} + \varepsilon_0 \overline{W} = \overline{V} + \overline{V} + \overline{W} + \overline{W} = \overline{V} + (\overline{V} + \overline{W}) + \overline{W}$; de *a)* y *b)* se deduce $\overline{V} + (\overline{W} + \overline{V}) + \overline{W} = \overline{V} + (\overline{V} + \overline{W}) + \overline{W}$); utilizando ahora la propiedad II (cancelativa) $\cancel{\overline{V}} + (\overline{W} + \overline{V}) + \cancel{\overline{W}} = \cancel{\overline{V}} + (\overline{V} + \overline{W}) + \cancel{\overline{W}}$

En conclusión, $\forall\ \overline{V}, \overline{W}, \in E \longrightarrow \overline{W} + \overline{V} = \overline{V} + \overline{W}$ l.q.q.d.

Puede verse que en las demostraciones no se utiliza la propiedad conmutativa del cuerpo K, puesto que la de neutros y opuestos es propia de ellos; por lo tanto, los teoremas I y II son extensibles a espacios vectoriales sobre cuerpos no abelianos.

Nota.—En la demostración de la propiedad II se ha aceptado que $o_0\ \overline{V} = \overline{0}$, porque es bien sabido que esta propiedad es una consecuencia inmediata de la tercera ley de la axiomática, es decir, de aceptar la existencia del $\overline{0}$, vector neutro para la suma con «cualquier» vector.

Si en la axiomática estricta, propuesta anteriormente, prescindimos incluso de la ley tercera (existencia del $\overline{0}$), a pesar de ello, y con sólo las cinco leyes restantes enunciadas, sería posible probar también, que cada vector tiene su propio elemento neutro para la ley de composición interna; y no sólo eso, sino que el neutro de un vector lo es para toda su variedad. En efecto: A la imagen del par $o_0\ \overline{V}$ la vamos a *notificar* con un $\overline{0}_v$; $\overline{0}_v \in E$.

$$\forall\ \overline{V} \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon + o)_0\ \overline{V} = \varepsilon_0\ \overline{V} = \overline{V} \\ (\varepsilon + o)_0\ \overline{V} = \varepsilon_0\ \overline{V} + o_0\ \overline{V} = \overline{V} + \overline{0}_v \\ (\varepsilon + o)_0\ \overline{V} = (o + \varepsilon)_0\ \overline{V} = o_0\ \overline{V} = \varepsilon_0\ \overline{V} = \overline{0}_v + \overline{V} \end{array} \right.$$

Ahora bien, la imagen de $(\varepsilon + o)_0\ \overline{V}$ es unica, porque la ley externa es una aplicación, luego

$\forall\ \overline{V}, \exists\ 0_v \in E$ tal que $\overline{V} = \overline{V} + \overline{0}_v = \overline{0}_v + \overline{V}$ l.q.q.d.

En consecuencia $\overline{W}$ también tendrá su neutro $\overline{0}_w$, tal que $\overline{W} + \overline{0}_w = \overline{W}$. Ahora bien, $\overline{W} + \overline{0}_v = \lambda_0\ \overline{V} + o_0\ \overline{V} = (\lambda + o)_0\ \overline{V} = \lambda_0\ \overline{V} = \overline{W}$. Lo que prueba que $\overline{0}_v$ es neutro de toda la variedad del $\overline{V}$.

EPILOGO

Antes de abandonar el tema, quiero señalar que, en el supuesto de espacios vectoriales sobre cuerpos $Z/(p)$, con $p \in Z$ número primo (para mayor comodidad supondremos que $p \leqslant 2$), la axiomática clásica es «reducible».

Es decir, que el tipo de cuerpo influye también en el número de axiomas libres con los que ha de ser definida la estructura. Para probarlo, formulo el siguiente teorema:

Teorema III, «En todo espacio vectorial (*), sobre un cuerpo $Z/(p)$ con $p \in Z$ número primo, la asociatividad de la ley externa (axioma noveno) y la distributividad de dicha ley respecto de la suma de vectores (axioma 8.º) no tienen carácter axiomático.»

Demostración:

a) $\forall\ \lambda, \mu \in K$ y $\forall\ \overline{V} \in E$, tenemos:

$$\begin{aligned}(\lambda_0\, \mu)_0\, \overline{V} &= [(\overbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots\ldots\ldots + \varepsilon}^{\lambda \text{ veces}}) \cdot \mu]_0\, \overline{V} = [\varepsilon \cdot \mu + \varepsilon \cdot \mu + \\ &\quad + \ldots + \varepsilon \cdot \mu]_0\, \overline{V} = \\ &= [\mu+\mu+ \ldots\ldots +\mu]_0\, \overline{V} = \mu_0\, \overline{V} + \mu_0 \overline{V} + \ldots\ldots + \mu_0\, \overline{V} = \\ &= \overline{W} + \overline{W} + \ldots\ldots + \overline{W} = \varepsilon_0\, \overline{W} + \varepsilon_0\, \overline{W} + \ldots\ldots + \varepsilon_0\, \overline{W} = \\ &= (\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots\ldots + \varepsilon}_{\lambda \text{ veces}})_0\, \overline{W} = \lambda_0\, \overline{W} = \lambda_0\, (\mu_0\, \overline{V}) \quad ;\end{aligned}$$

luego $\forall\ \lambda, \mu \in K$ y $\forall\ \overline{V} \in E \longrightarrow (\lambda \cdot \mu)_0\, \overline{V} = \lambda_0\, (\mu_0\, \overline{V})$ l.q.q.d.

b) $\forall\ \lambda \in K$ y $\forall\ \overline{V}, \overline{W} \in E$, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda_0\, (\overline{V} + \overline{W}) &= (\lambda \cdot \varepsilon)_0\, (\overline{V}+\overline{W}) = (\varepsilon+\varepsilon+ \ldots\ldots +\varepsilon)_0\, (\overline{V}+\overline{W}) = \\ &= \varepsilon_0\, (\overline{V}+\overline{W}) + \varepsilon_0\, (\overline{V}+\overline{W}) + \ldots\ldots + \varepsilon_0\, (\overline{V}+\overline{W}) = \\ &= (\overline{V}+\overline{V}+ \ldots\ldots +\overline{V}) + (\overline{W}+\overline{W}+ \ldots\ldots +\overline{W}) = \\ &= (\varepsilon_0\, \overline{V}+\varepsilon_0\, \overline{V}+ \ldots\ldots +\varepsilon_0\, \overline{V}) + (\varepsilon_0\, \overline{W}+\varepsilon_0\, \overline{W}+ \ldots\ldots + \\ &\qquad + \varepsilon_0\, \overline{W}) = \\ &= (\varepsilon + \varepsilon + \ldots\ldots + \varepsilon)_0\, \overline{V} + (\varepsilon + \varepsilon + \ldots\ldots + \varepsilon)_0\, \overline{W} = \\ &= \lambda_0\, \overline{V} + \lambda_0\, \overline{W}\end{aligned}$$

luego

$\forall\ \lambda \in K$ y $\forall\ \overline{V}, \overline{W} \in E \longrightarrow \lambda_0 (\overline{V} + \overline{W}) = \lambda_0\, \overline{V} + \lambda_0\, \overline{W}$ l.q.q.d.

(*) : definido con la axiomática clásica.