FUNCIONES VALORADAS (I)

por

VICENTE FRAILE OVEJERO

La función $Y(x)$ de Heaviside vale 1 cuando es $x > 0$ y -1 si es $x < 0$. No está definida en $x = 0$. Evidentemente podemos escribir

$$Y(x) = \frac{|x|}{x}$$

Si decimos simplemente que la función de Heaviside es

$$\frac{|x|}{x}$$

nos ahorramos la anterior definición descriptiva, puesto que el comportamiento de la fracción

$$\frac{|x|}{x}$$

es, precisamente, el de la función de Heaviside. Pero, además, como veremos a continuación, la introducción del valor absoluto es muy útil, porque los símbolos $|f(x)|$ y

$$\frac{|f(x)|}{f(x)}$$

con su contenido conceptual correspondiente, se someten sin dificultad a las leyes formales del cálculo diferencial e integral, y permiten resolver con suma sencillez problemas a los cuales suele aplicarse los métodos distributivos de Laurent Schwartz.

Que nosotros sepamos, la incorporación de las funciones valoradas $|f(x)|$ y las de la forma

$$\frac{|f(x)|}{f(x)}$$

a los métodos clásicos de cálculo es debida al español Arturo Fraile Ovejero, fallecido a los 27 años en 1943, el cual publicó varios trabajos sobre esta cuestión en la *Revista Matemática Hispano-Americana*, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, *Euclides* y *Las Ciencias*, entre los años 1941 y 1943.

1. La función generalizadora de Heaviside

Si $f(x)$ es continua en $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$, con ceros en I en número finito, es claro que la función

$$S(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$$

vale 1 cuando $f(x) > 0$ en I, y -1 si es $f(x) < 0$ en I. En los ceros de $f(x)$ no está definida. Por todo ello es apropiado decir que $S(x)$ es una función de Heaviside generalizada.

Evidentemente, la derivada de $S(x)$ es nula para todo $x \in \mathrm{I}$ que no sea un cero de $f(x)$. En los ceros de $f(x)$ no está definida la derivada $S'(x)$; pero si x_0 es un cero de $f(x)$, se verifica:

$$S'(x_0 +) = S'(x_0 -) = 0$$

Luego en $x = x_0$ podemos atribuir a $S'(x)$ el valor cero, con lo cual la función $S(x)$ tiene derivada nula $\forall\, x \in \mathrm{I}$. Así, pues: *Las funciones de Heaviside se comportan como constantes en el cálculo diferencial e integral*, y podemos escribir, por ejemplo:

$$\int S(x)\, \varphi(x)\, dx = S(x) \int \varphi(x)\, dx$$

También podemos sustituir la constante arbitraria de una integración por una función arbitraria $S(x)$, o por una combinación lineal de funciones S. Por ejemplo, si $\Phi(x)$ es una primitiva de $\varphi(x)$, también lo es

$$\Phi(x) + \sum_{1}^{n} k_i \frac{|x - x_i|}{x - x_i}$$

Esta primitiva tiene n discontinuidades de primera especie en los puntos $x = x_i$, y las oscilaciones en ellas valen, respectivamente, $2\, k_i$.

La propiedad de ser nula $S'(x)\ \forall\, x$ donde está definida $f(x)$ nos permite derivar una *función valorada* $|f(x)|$, si $f(x)$ es derivable, y también integrarla, pues

$$D\, |f(x)| = D\, [S(x)\, f(x)] = S(x)\, f'(x),$$

$$\int |f(x)|\, dx = \int S(x)\, f(x)\, dx = S(x) \int f(x)\, dx,$$

donde

$$S(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$$

La obra de Laurent Schwartz, *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques*, contiene varios ejercicios correspondientes al capítulo que se refiere a distribuciones, y que pueden ser resueltos utilizando la propiedad fundamental de las funciones $S(x)$, empleando las leyes formales del cálculo diferencial ordinario. Veamos algunos:

1.º *Calcular las derivadas sucesivas de* $|x|$, $|\cos x|$ *y* $|\mathrm{sen}\, x|$.

Puesto que es

$$|x| = \frac{|x|}{x}\, x = Y(x)\, x,$$

su primera derivada es la función $Y(x)$ de Heaviside. Las demás derivadas serán, por lo tanto, nulas.

Para derivar $|\cos x|$ introducimos la función

$$\frac{|\cos x|}{\cos x}, \text{ haciendo } |\cos x| = \frac{|\cos x|}{\cos x} \cos x.$$

Las cuatro primeras derivadas de $|\cos x|$ son:

$$\frac{|\cos x|}{\cos x} (-\,\mathrm{sen}\, x) = -\,|\cos x|\ \mathrm{tg}\, x$$

$$\frac{|\cos x|}{\cos x} (-\cos x) = -\,|\cos x|$$

$$\frac{|\cos x|}{\cos x}\, \mathrm{sen}\, x = |\cos x|\ \mathrm{tg}\, x$$

$$\frac{|\cos x|}{\cos x} \cos x = |\cos x|$$

Esta derivada 4.ª es la función de partida, por lo cual, al seguir derivando se repite el ciclo. La fórmula general de las derivadas impares y pares será, pues:

$$\left.\begin{aligned} D^{2n+1}\, |\cos x| &= (-1)^{n+1}\, |\cos x|\ \mathrm{tg}\, x \\ D^{2n+2}\, |\cos x| &= (-1)^{n+1}\, |\cos x| \end{aligned}\right\}\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Con la misma sencillez se obtienen las derivadas de órdenes $2\,n + 1$ y $2\,n + 2$ de

$$|\mathrm{sen}\, x| = \frac{|\mathrm{sen}\, x|}{\mathrm{sen}\, x}\, \mathrm{sen}\, x$$

que son:

$$\left.\begin{aligned} D^{2n+1}\, |\mathrm{sen}\, x| &= (-1)^{n}\, |\mathrm{sen}\, x|\ \mathrm{ctg}\, x \\ D^{2n+2}\, |\mathrm{sen}\, x| &= (-1)^{n+1}\, |\mathrm{sen}\, x| \end{aligned}\right\}\quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

2.ª *Calcular las cuatro primeras derivadas de las distribuciones* $T_1 = |x| \text{ sen } x$, $T_2 = |x| \cos x$.

Podemos hallar sin dificultad las derivadas genéricas de órdenes $2n + 1$ y $2n + 2$. Para T_1 tenemos, sucesivamente:

$$T_1' = \frac{|x|}{x} \text{ sen } x + |x| \cos x = |x| \left(\frac{\text{sen } x}{x} + \cos x\right)$$

$$T_1'' = 2 \frac{|x|}{x} \cos x - |x| \text{ sen } x = |x| \left(\frac{2 \cos x}{x} - \text{sen } x\right)$$

$$T_1''' = -3 \frac{|x|}{x} \text{ sen } x - |x| \cos x = -|x| \left(\frac{3 \text{ sen } x}{x} + \cos x\right)$$

$$T_1^{\text{IV}} = -4 \frac{|x|}{x} \cos x + |x| \text{ sen } x = -|x| \left(\frac{4 \cos x}{x} = \text{sen } x\right)$$

Por lo tanto, las expresiones generales de las derivadas impares y pares son, respectivamente,

$$\left.\begin{aligned} T_1^{(2n+1)} &= (-1)^n |x| \left[\frac{(2n+1) \text{ sen } x}{x} + \cos x\right] \\ T_1^{(2n+2)} &= (-1)^n |x| \left[\frac{(2n+2) \cos x}{x} - \text{sen } x\right] \end{aligned}\right\} n \in \mathbf{N}$$

De forma análoga, se llega a las expresiones generales de las derivadas impares y pares de la distribución T_2, que son:

$$\left.\begin{aligned} T_2^{(2n+1)} &= (-1)^n |x| \left[\frac{(2n+1) \cos x}{x} - \text{sen } x\right] \\ T_2^{(2n+2)} &= (-1)^{n+1} |x| \left[\frac{(2n+2) \text{ sen } x}{x} + \cos x\right] \end{aligned}\right\} n \in \mathbf{N}$$

3.º *Calcular*:

$$a): (D - \lambda)\, Y(x)\, e^{\lambda x}; \; b): (D^2 + w^2) \frac{Y(x) \text{ sen } w x}{w};$$

$$c): D^m \frac{x^{m-1}\, Y(x)}{(m-1)!} \text{ para m entero} \geqslant 1.$$

$$a): D[Y(x)\, e^{\lambda x}[- \lambda\, Y(x)\, e^{\lambda x} = Y(x) \cdot \lambda\, e^{\lambda x} - \lambda\, Y(x)\, e^{\lambda x} = 0.$$

b): La primera derivada de

$$\frac{1}{w} Y(x) \operatorname{sen} w x$$

es $Y(x) \cos w x$, luego

$$D^2 \frac{Y(x) \operatorname{sen} w x}{w} + w Y(x) \operatorname{sen} w x = 0.$$

c): La derivada k-sima de

$$\frac{Y(x)}{(m-1)!} x^{m-1} \text{ es } \frac{Y(x)}{(m-k-1)!} x^{m-k-1}$$

Si $k = m - 1$, será

$$D^{m-1} \left[\frac{Y(x)}{(m-1)!} x^{m-1} \right] = Y(x)$$

Luego la derivada m-sima es idénticamente nula.

Por nuestra parte, incluiremos aquí las integrales inmediatas:

$$\int |x| \, dx = \int Y(x) \, x \, dx = Y(x) \int x \, dx = \frac{1}{2} x \, |x| + C;$$

$$\int |\cos x| \, dx = \frac{|\cos x|}{\cos x} \int \cos x \, dx = |\cos x| \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int |\operatorname{sen} x| \, dx = \frac{|\operatorname{sen} x|}{\operatorname{sen} x} \int \operatorname{sen} x \, dx = - |\operatorname{sen} x| \operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int |x| \, x^n \, dx = \frac{|x|}{x} \int x^{n+1} \, dx = \frac{x^{n+1} \, |x|}{n+2} + C.$$

2. Un convenio

Sea $f(x)$ continua en $E \subset \mathbf{R}$ con un número finito de ceros en E. Sean x_k, x_{k+1} dos ceros consecutivos y supongamos que es $f(x) > 0$ en (x_k, x_{k+1}) y negativa en los subintervalos contiguos. La función

$$S(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$$

vale 1 en el abierto (x_k, x_{k+1}), y los límites $S(x_k +)$, $S(x_{k+1} -)$ existen y son también iguales a la unidad. En vista de ello, vamos a convenir en que la función $S(x)$ vale 1 en el intervalo *cerrado* $[s_k, x_{k+1}]$.

De un modo general: Para cada abierto (x_k, x_{k+1}), cuyos extremos son dos ceros consecutivos de $f(x)$ en E, convenimos en hacer $S(x_k) = S(x_k +)$, $S(x_{k+1}) = S(x_{k+1} -)$. Estos dos límites laterales de $S(x)$ en los extremos de un abierto entre ceros (x_k, x_{k+1}) fueron llamados por Arturo Fraile *valores virtuales* de $S(x)$, y aparecen siempre asociados a un subintervalo abierto entre dos ceros *consecutivos* de $f(x)$ en E.

Este hecho de que los valores virtuales vayan siempre asociados a los abiertos entre dos ceros consecutivos, permite sustituir un abierto (x_k, x_{k+1}) por el cerrado correspondiente, con lo cual $S(x)$ está *circunstancialmente* definida $\forall\ x \in [x_k, x_{k+1}]$, sin que por ello desaparezca el carácter indeterminado de $S(x)$ en cada cero de $f(x)$ considerado local y aisladamente. Este convenio refuerza, además, el carácter idénticamente nulo de la derivada de $S(x)$ $\forall\ x \in$ E.

Nos va a permitir también la integración entre a y b de una función valorada $|f(x)|$, cuando $f(x)$ posee un número finito de ceros en $[a, b]$. Va a hacer factible, asimismo, la formulación de ciertas funciones; por ejemplo, la función característica $\varphi(x)$ de un $E \subset \mathbf{R}$, abierto o cerrado, utilizando funciones S.

3. La integral definida de $|f(x)|$.

Sea $f(x)$ integrable [R] en $[a, b]$, y supongamos que $f(x)$ posee en dicho intervalo un número finito de ceros, de los cuales son x_k, x_{k+1} dos consecutivos. Si descomponemos la integral

$$\int_a^b$$

en suma de integrales entre cada dos ceros consecutivos de $f(x)$ en $[a, b]$, tendremos que calcular sumandos de la forma

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|\ dx$$

Si introducimos aquí la función

$$S(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$$

como hemos hecho en la derivada y en la integral indefinida, tendremos:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} S(x)\ f(x)\ dx$$

El comportamiento de $S(x)$ como constante nos permitiría sacar esta función del signo integral, lo mismo que se ha venido haciendo hasta aquí. Sin embargo, en este caso, como los límites de la integral son ceros de $f(x)$, el integrando no está definido en dichos límites, por no estarlo $S(x)$. Pero si utilizamos el convenio del apartado anterior, $S(x)$ valdrá **1** (ó **—1**) en el intervalo cerrado $[x_k, x_{k+1}]$, con lo cual el integrando estará entonces definido en los límites de la integral, y nos queda:

$$S(x)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx,$$

donde $S(x)$ vale **1** (ó **—1**) en $[x_k, x_{k+1}]$. Así, pues, un sumando

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|\,dx$$

se reduce a

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

o a

$$-\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

según sea $f(x) > 0$ en (x_k, x_{k+1}), o < 0, respectivamente.

Si hubiéramos e-crito directamente

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|\,dx = S(x)\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

expresaríamos que habría que multiplicar la integral

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$

por el valor de $S(x)$ en $[x_k, x_{k+1}]$, lo cual implica admitir el convenio referido.

Tratemos de calcular, por ejemplo:

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\,dx$$

La parábola $f(x) = x^2 - 1$ tiene los dos ceros -1, 1 en el intervalo de integración; de modo que haremos

$$\int_{-2}^{2} = \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{2}$$

Como

$$\frac{|x_2 - 1|}{x^2 - 1} = 1$$

en $[-2, -1[$ y en $]1, 2]$ utilizaremos el convenio en estos semiabiertos, con lo cual

$$\frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1}$$

vale 1 en los correspondientes cerrados. De modo análogo

$$\frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 1} = -1$$

en el cerrado $[-1, 1]$. Será, pues:

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\, dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx - \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, dx = 4.$$

Vemos que el papel que desempeña el factor $S(x)$ de cada integral es hacer positivas las áreas que son negativas.

Entre los problemas y ejercicios propuestos en Facultades y Escuelas de Ingenieros, es relativamente frecuente encontrar integrales dobles de funciones valoradas. Por ejemplo,

$$\iint_{R} |\cos (x + y)|\, dx\, dy$$

siendo $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$. La solución tradicional consiste aquí en subdividir el recinto R en tres por medio de dos paralelas a la diagonal $\overline{(0, \pi)\ (\pi, 0)}$, que pasan, respectivamente, por

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{3\pi}{2} . 0\right)$$

y establecer las correspondientes identidades entre $|\cos (x + y)|$ y

$\pm \cos(x + y)$ en cada subrecinto. Es más breve proceder del siguiente modo:

$$I = \iint_R |\cos(x + y)|\, dx\, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x + y)|\, dy.$$

El coseno de la integral interior tiene un cero en

$$y = \frac{\pi}{2} - x \in [0, \pi]$$

para ciertos x, siendo

$$\frac{|\cos(x + y)|}{\cos(x + y)} = 1 \text{ en } \left[0, \frac{\pi}{2} - x\right], \text{ y } -1 \text{ en } \left[\frac{\pi}{2} - x, \pi\right]$$

Luego

$$\int_0^{\pi} |\cos(x + y)|\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2} - x} \cos(x + y)\, dy - \int_{\frac{\pi}{2} - x}^{\pi} \cos(x + y)\, dy = 2$$

Por lo tanto, $I = 2\pi$.

Otro ejemplo:

$$\iint_R |y - \operatorname{sen} x|\, dx\, dy\ ,\ R = [0, \pi] \times [0, 1]$$

Será:

$$I = \iint_R |y - \operatorname{sen} x|\, dx\, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{1} |y - \operatorname{sen} x|\, dy$$

Hay un cero de la función en $y = \operatorname{sen} x$. Haciendo $[0, 1] = [0, \operatorname{sen} x] \cup [\operatorname{sen} x, 1]$, y teniendo en cuenta que

$$\frac{|y - \operatorname{sen} x|}{y - \operatorname{sen} x} = 1$$

para $y \in [\text{sen } x, 1]$, resulta (integral interior):

$$I_1 = -\int_0^{\text{sen } x} (y - \text{sen } x)\, dy + \int_{\text{sen } x}^{1} (y - \text{sen } x)\, dy = \text{sen}^2 x - \text{sen } x + \frac{1}{2}$$

luego

$$I = \int_0^{\pi} \left(\text{sen}^2 x - \text{sen } x + \frac{1}{2}\right) dx = \pi - 2.$$