UN SISTEMA DE REGLAS PARA EL CALCULO PROPOSICIONAL

por

M Fartos Martinez

Nos proponemos presentar un sistema de reglas para el cálculo de deducción natural en lógica de enunciados, que consideramos puede tener algún interés desde el punto de vista didáctico. Demostraremos, por otra parte, su completitud relativa respecto del sistema habitual de las ocho reglas seleccionadas por Gentzen (1).

El sistema incluye, además de la regla de introducción de premisas, las siguientes seis reglas primitivas:

1.ª *Introducción del conjuntor* (Ic). De la afirmación sucesiva de dos proposiciones se puede pasar a la afirmación de la conjunción de ambas.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ \hline A \wedge B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} /i/\ (n)\ A \\ /j/\ (n+m)\ B \\ \hline /i,j/\ (n+m+1)\ A \wedge B \end{array}$$

2.ª *Eliminación del conjuntor* (Ec). De la afirmación de la conjunción de dos proposiciones se puede pasar a la afirmación por separado de cada una de ellas.

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

3.ª *Introducción del disyuntor* (Id) (2). De la afirmación de una proposición cabe inferir la disyunción inclusiva formada con esa proposición y cualesquiera otra.

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

---

(1) Cfr. Garrido, M.: *Lógica simbólica* (E. Tecnos). Madrid, 1974, páginas 74 y siguientes.

(2) Estas tres primeras reglas y la sexta (Td) se emplean bajo las mismas denominaciones en el habitual sistema tipo Gentzen.

4.ª *Eliminación del disyuntor* (Ed.). Bajo esta denominación empleamos no la regla habitual, en la que se apoya la argumentación llamada dilema, sino la regla usualmente denominada ***silogismo disyuntivo***. Su sentido es: dada una disyunción inclusiva (= suma lógica) y la negación de uno de sus miembros, se puede concluir (*se sigue*) la afirmación del otro. La regla se apoya obviamente en que la condición necesaria y suficiente para que una disyunción no exclusiva de proposiciones sea verdadera es que por lo menos uno de sus miembros lo sea.

$$\frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ —A \end{array}}{B} \qquad \frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ —B \end{array}}{A}$$

5.ª *Cambio del implicador por el disyuntor o por el conjuntor* (Ei). La regla establece el sentido del implicador.

$$\frac{A \rightarrow B}{—A \vee B} \qquad \frac{A \rightarrow B}{—(A \wedge —B)}$$

6.ª *Introducción del implicador* (Td). También llamada regla de eliminación de premisas, regla de condicionalización o Teorema de deducción (3). Si de una hipótesis dada se infiere una proposición, cabe establecer lógicamente la implicación que tenga como antecedente aquella hipótesis y como consecuente esa proposición.

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \end{array}\right.}{A \rightarrow B} \qquad \begin{array}{r} /n/\ (n)\ A \\ \vdots \\ /n/\ (n + m)\ B \\ \hline /\phi/\ (n + m + 1)\ A \rightarrow B \end{array}$$

Para demostrar la completitud relativa de este sistema de reglas respecto del habitual sistema, tipo Gentzen, bastará obtener como reglas **derivadas:**

I. La regla de *eliminación del implicador o Modus ponens.*

$$\frac{\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ A \end{array}}{B}$$

II. La regla de *introducción del negador* o *regla del absurdo.*

$$\frac{\left[\begin{array}{l} A \\ \vdots \\ B \wedge —B \end{array}\right.}{—A}$$

(3) Obsérvese que en este sistema de reglas la regla sexta es la única que permite eliminar premisas o supuestos adicionales.

III. La regla de *eliminación del negador* o regla de doble negación.

$$\frac{-\,-A}{A}$$

IV. La regla usualmente empleada para la eliminación del disyuntor.

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \left[\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{c} B \\ \vdots \\ C \end{array}\right. \\ \hline C \end{array}$$

Vamos a comprobar que estas cuatro reglas, o sus equivalentes, aparecen, efectivamente, entre las derivadas de nuestro sistema:

7.ª $$\frac{A}{A \wedge (B \vee A)}$$

Fundamentación

/1/ (1) A	Premisa
/1/ (2) $B \vee A$	Id 1
/1/ (3) $A \wedge (B \vee A)$	Ic 1, 2
/4/ (4) $A \wedge (B \vee A)$	Premisa
/4/ (5) A	Ec 4

8.ª $$\frac{A}{A}$$

Fundamentación

/1/ (1) A	Premisa
/1/ (2) $A \wedge (B \vee A)$	7.ª 1
/1/ (3) A	7.ª 2

9.ª $$\frac{-\,-A}{-A \vee A}$$

Fundamentación

/1/ (1) $-\,-A$	Premisa
/2/ (2) A	Premisa
/1,2/ (3) $-\,-A \wedge A$	Ic 1,2
/1,2/ (4) A	Ec 3
/1/ (5) $A \rightarrow A$	Td 2-4
/1/ (6) $-A \vee A$	Ei 5

10.ª $$\frac{-\,-A}{A}$$

Fundamentación

/1/ (1) $-\,-A$	Premisa
/1/ (2) $-A \vee A$	9.ª 1
/1/ (3) A	Ed 1-2

11.ª $$\frac{A \to (B \wedge -B)}{-A}$$

Fundamentación

/1/ (1) $A \to (B \wedge -B)$	Premisa
/1/ (2) $-A \vee (B \wedge -B)$	Ei 1
/∅/ (3) $B \to B$	por 8.ª
/∅/ (4) $-(B \wedge -B)$	Ei 3
/1/ (5) $-A$	Ed 2-4

12.ª $$\frac{A}{- - A}$$

Fundamentación

/1/ (1) A	Premisa
/2/ (2) $-A$	Premisa
/1,2/ (3) $A \wedge -A$	Ic 1,2
/1/ (4) $-A \to (A \wedge -A)$	Td 2-3
/1/ (5) $- - A$	11.ª 4

13.ª $$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ A \end{array}}{B}$$

Fundamentación

/1/ (1) $A \to B$	Premisa
/2/ (2) A	Premisa
/1/ (3) $-A \vee B$	Ei 1
/2/ (4) $- - A$	12.ª 2
1,2/ (5) B	Ed 3-4

14.ª $$\frac{A \to B}{-B \to -A}$$

Fundamentación

/1/ (1) $A \to B$	Premisa
/2/ (2) $-B$	Premisa
/1/ (3) $-A \vee B$	Ei 1
/1,2/ (4) $-A$	Ed 2-3
/1/ (5) $-B \to -A$	Td 2-4

15.ª $$\frac{A \to (B \to C)}{(A \wedge B) \to C}$$

Fundamentación

/1/ (1) $A \to (B \to C)$	Premisa
/2/ (2) $A \wedge B$	Premisa
/2/ (3) A	Ec 2
/2/ (4) B	Ec 2
/1,2/ (5) $B \to C$	13.ª 1-3
/1,2/ (6) C	13.ª 4-5
/1/ (7) $(A \wedge B) \to C$	Td 2-6

16.ª $$\frac{\begin{array}{c} A \to B \\ B \to C \end{array}}{A \to C}$$

Fundamentación

/1/ (1) $A \to B$	Premisa
/2/ (2) $B \to C$	Premisa
/3/ (3) A	Premisa
/1,3/ (4) B	13.ª 1-3
/1,2.3/ (5) C	13.ª 2-4
/1,2/ (6) $A \to C$	Td 3-5

17.ª $$\frac{A \vee B}{-A \to B}$$

Fundamentación

/1/ (1) $A \vee B$	Premisa
/2/ (2) $-A$	Premisa
/1,2/ (3) B	Ed 1-2
/1/ (4) $-A \to B$	Td 2-3

18.ª $$\frac{-A \to A}{A}$$

Fundamentación

/1/ (1) $-A \to A$	Premisa
/2/ (2) $-A$	Premisa
/1,2/ (3) A	13.ª 1-2
/1,2/ (4) $-A \wedge A$	Ic 2,3
/1/ (5) $-A \to (-A \wedge A)$	Td 2-4
/1/ (6) $- - A$	11.ª 5
/1/ (7) A	10.ª 6

19.ª
$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \end{array}}{(A \vee B) \rightarrow C}$$

Fundamentación

/1/ (1) A → C	Premisa
/2/ (2) B → C	Premisa
/3/ (3) A v B	Premisa
/1/ (4) —C → —A	14.ª 1
/3/ (5) —A → B	17.ª 3
/1,3/ (6) —C → B	16.ª 4-5
/1,2,3/ (7) —C → C	16.ª 6-2
/1,2,3/ (8) C	18.ª 7
/1,2/ (9) (A v B) → C	Td 3-8

Las reglas 13.ª, 11.ª, 10.ª y 19.ª, derivadas en nuestro sistema, se corresponden con (o fundamentan a) las reglas I, II. III y IV, que son tomadas frecuentemente como reglas primitivas.

Insertamos, por último, otras dos reglas derivadas interesantes:

20.ª
$$\frac{—A \vee B}{A \rightarrow B}$$

Fundamentación

/1/ (1) —A v B	Premisa
/2/ (2) A	Premisa
/2/ (3) — — A	12.ª 2
/1,2/ (4) B	Ed 1-3
/1/ (5) A → B	Td 2-4

21.ª
$$\frac{A \wedge —A}{B}$$

Fundamentacion

/1, (1) A ∧ —A	Premisa
/1/ (2) A	Ec 1
/1/ (3) —A	Ec 1
/1/ (4) A v B	Id 2
/1/ (5) B	Ed 3-4

TABLA DE SIMBOLOS UTILIZADOS

— negador.

∧ conjuntor.

v disyuntor.

→ implicador.

(*n*) número de línea.

/*n*/ número de línea de dependencia.