AXIOMATICA DE ALGEBRA DE BOOLE

por

ANTONIO GONZALEZ CARLOMAN

Un conjunto E, en el que definimos una operación unitaria (*) y dos operaciones binarias (+) y (·), es un álgebra de Boole si se cumple:

Existen dos elementos 0 y 1 de E, tales que siendo x, y, z, elementos cualesquiera de E, se verifican los siguientes axiomas:

(A)

A_1. $x + y = y + x$.
A_2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
A_3. $x + x = x$.
A_4. $x + 0 = x$.
A_5. $x + 1 = 1$.
A_6. $x + x^* = 1$.
A_7. $x + (x \cdot y) = x$.
A_8. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.
A_9. $x \cdot y = y \cdot x$.
A_{10}. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
A_{11}. $x \cdot x = x$.
A_{12}. $x \cdot 1 = x$.
A_{13}. $x \cdot 0 = 0$.
A_{14}. $x \cdot x^* = 0$.
A_{15}. $x \cdot (x + y) = x$.
A_{16}. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Esta axiomática es muy larga; pero pueden elegirse otras axiomáticas con menos axiomas y equivalentes a ella. Las axiomáticas equivalentes a (A) más conocidas son las siguientes:

AXIOMÁTICA DE SIKORSKI

A_1. $x + y = y + x$.
A_2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
A_3. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

A_4. $x + (x \cdot y) = x$.
A_5. $(x \cdot x^*) + y = y$.
A_6. $x \cdot y = y \cdot x$.
A_7. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
A_8. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.
A_9. $x \cdot (x + y) = x$.
A_{10}. $(x + x^*) \cdot y = y$.

AXIOMÁTICA DE HUNTINGTON-WALUSINSKI

A_1. $x + y = y + x$.
A_2. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.
A_3. $x + 0 = x$.
A_4. $x + x^* = 1$.
A_5. $x \cdot y = y \cdot x$.
A_6. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
A_7. $x \cdot 1 = x$.
A_8. $x \cdot x^* = 0$.

AXIOMÁTICA DE NEWMAN

A_1. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
A_2. $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.
A_3. $x \cdot 1 = x$.
A_4. $x + 0 = x$.
A_5. $0 + x = x$.
A_6. $x \cdot x^* = 0$.
A_7. $x + x^* = 1$.

Nosotros proponemos lo siguiente:

Un conjunto E, en el que definimos una operación unitaria $(^*)$ y dos operaciones binarias $(+)$ y $(\cdot)$, es un álgebra de Boole, si, siendo x, y dos elementos cualesquiera de E, se define la operación $(\cdot)$ como:

$$x \cdot y = (x^* + y^*)^*$$

y se cumple:

Existe un elemento 1 de E, tal que siendo x, y, z elementos cualesquiera de E, se verifican los siguientes axiomas:

(B)
B_1. $x + y = y + x$.
B_2. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$.
B_3. $x + (x \cdot y) = x$.
B_4. $x + x^* = 1$.

Equivalencia de (A) y (B).

Llamando 0 a 1^* y siendo x, y, z elementos cualesquiera de E, se verifica:

1. $x \cdot y = y \cdot x$.

En efecto:

$$x \cdot y \overset{1}{=} (x^* + y^*)^* \overset{2}{=} (y^* + x^*)^* \overset{3}{=} y \cdot x$$

1. Por definición de $(\cdot)$.
2. Por B_1.
3. Por definición de $(\cdot)$.

2. $x \cdot x^* = 0$.

En efecto:

$$x \cdot x^* \overset{1}{=} (x^* + x^{**})^* \overset{2}{=} 1^* \overset{3}{=} 0$$

1. Por definición de $(\cdot)$.
2. Por B_4.
3. Por convenio.

3. $x = x^{**}$.

En efecto:

$$x \overset{1}{=} x + (x \cdot x^*) \overset{2}{=} x + 0 \overset{3}{=} x + (x^* \cdot x^{**}) \overset{4}{=} (x + x^*) \cdot (x + x^{**}) \overset{5}{=}$$

$$1 \cdot (x + x^{**}) \overset{6}{=} (x^* + x^{**}) \cdot (x + x^{**}) \overset{7}{=} (x^* \cdot x) + x^{**} \overset{8}{=} 0 + x^{**} \overset{9}{=}$$

$$= (x^* \cdot x^{**}) + x^{**} \overset{10}{=} x^{**}$$

1. Por B_3.
2. Por 2.
3. Por 2.
4. Por B_2.
5. Por B_4.
6. Por B_4.
7. Por B_2, B_1.
8. Por 2, 1.
9. Por 2.
10. Por B_1, 1, B_3.

4. $(x \cdot y)^* = x^* + y^*$.

En efecto:

$$(x \cdot y)^* \overset{1}{=} (x^* + y^*)^{**} \overset{2}{=} x^* + y^*$$

1. Por definición de $(\cdot)$.
2. Por 3.

5. $(x + y)^* = x^* \cdot y^*$.

En efecto:

$$(x + y)^* \overset{1}{=} (x^{**} + y^{**})^* \overset{2}{=} x^* \cdot y^*$$

1. Por 3.
2. Por definición de $(\cdot)$.

6. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.

En efecto:

$$x \cdot (y + z) \overset{1}{=} (x^* + (y + z)^*)^* \overset{2}{=} (x^* + (y^* \cdot z^*))^* \overset{3}{=} ((x^* + y^*) \cdot$$
$$\cdot (x^* + z^*))^* \overset{4}{=} (x^* + y^*)^* + (x^* + z^*)^* \overset{5}{=} (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

1. Por definición de $(\cdot)$.
2. Por 5.
3. Por B_2.
4. Por 4.
5. Por definición de $(\cdot)$.

7. $x \cdot (x + y) = x$.

En efecto:

$$x \cdot (x + y) \overset{1}{=} (x^* + (x + y)^*)^* \overset{2}{=} (x^* + (x^* \cdot y^*))^* \overset{3}{=} x^{**} \overset{4}{=} x$$

1. Por definición de $(\cdot)$.
2. Por 5.
3. Por B_3.
4. Por 3.

8. Ley de dualidad.

B_1. $x + y = y + x$.	1. $x \cdot y = y \cdot x$.
B_2. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	6. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
B_3. $x + (x \cdot y) = x$.	7. $x \cdot (x + y) = x$.
B_4. $x + x^* = 1$.	2. $x \cdot x^* = 0$.

Ya tenemos demostradas, entre otras, las igualdades 1, 6, 7, 2, partiendo de las igualdades B_1, B_2, B_3, B_4, y observamos que este grupo de ocho igualdades tiene la notable particularidad que de las igualdades B_1, B_2, B_3, B_4 pasamos, respectivamente, a las igualdades 1, 6, 7, 2 por el simple cambio de $(+)$ por $(\cdot)$, $(\cdot)$ por $(+)$ y 1 por 0. Esta concordancia la conocemos como dualidad, y por ella, a partir de ahora, demostrada una igualdad partiendo, como estamos haciendo, de B_1, B_2, B_3, B_4, quedaría demostrada la igualdad dual haciendo los respectivos pasos duales y partiendo de 1, 6, 7, 2.

9. $x + x = x \qquad\qquad x \cdot x = x.$

En efecto:

$$x + x \overset{1}{=} x + (x \cdot (x + y)) \overset{2}{=} x$$

1. Por 7.
2. Por B_3.

$$x \cdot x \overset{1}{=} x \cdot (x + (x \cdot y)) \overset{2}{=} x$$

1. Por B_3.
2. Por 7.

Observemos la dualidad en la demostración de la igualdad de la derecha. En adelante, solamente demostraremos una de ellas.

10. $x + 0 = x \qquad\qquad x \cdot 1 = x.$

En efecto:

$$x \cdot 1 \overset{1}{=} x \cdot (x + x^*) \overset{2}{=} x$$

1. Por B_4.
2. Por 7.

11. $x + 1 = 1 \qquad\qquad x \cdot 0 = 0.$

En efecto:

$$x + 1 \overset{1}{=} (x + 1) \cdot 1 \overset{2}{=} 1$$

1. Por 10.
2. Por 7, 1, B_1.

12. $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad\qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$

En efecto:

$$(x + y) + z \overset{1}{=} ((x + y) + z) \cdot (x + x^*) \overset{2}{=} (((x + y) + z) \cdot x) + (((x + y) + z) \cdot x^*) \overset{3}{=} (((x + y) \cdot x) + (z \cdot x)) + (((x + y) \cdot x^*) + (z \cdot x^*)) \overset{4}{=} (x + (z \cdot x)) + (((x \cdot x^*) + (y \cdot x^*)) + (z \cdot x^*)) \overset{5}{=} x + ((y \cdot x^*) + (z \cdot x^*)) \overset{6}{=} x + ((y + z) \cdot x^*) \overset{7}{=} (x + (y + z)) \cdot (x + x^*) \overset{8}{=} x + (y + z)$$

1. Por 10, B_1.
2. Por 6.

3. Por 1, 6.
4. Por 1, 7, 6.
5. Por 1, B_3, 2, 10, B_1.
6. Por 1, 6.
7. Por B_2.
8. Por B_4, 10.

El sistema de axiomas (A) es equivalente al sistema de axiomas (B), ya que el sistema (B) está incluido en el (A), y el (A) fue obtenido mediante el (B).