UNA PROPIEDAD NOTABLE DE LA TANGENTE DE LA PARABOLA CUBICA PLANA

por

JESUS GOMEZ SANCHEZ

Primeramente veamos dónde corta la tangente genérica. del tipo particular de parábola cúbica.

$$y = a\,x^3$$

a la curva en un punto ulterior al punto de contacto.

Ha de resolverse el sistema

$$\left.\begin{array}{r} Y - a\,x^3 = 3a\,x^2\,(X - x) \\ Y = a\,X^3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a(X^3 - x^3) = 3ax^2\,(X - x) \\ Y = a\,X^3 \end{array}\right\}$$

Las abscisas de los puntos comunes deben ser: $X = x$, raíz doble, pues es el punto de contacto; la otra raíz, una vez separada la raíz doble mencionada, es $X = -2x$. El significado geométrico de este resultado es el siguiente:

Para las parábolas cúbicas, del tipo de ecuación reducida $y = a\,x^3$, *la tangente, en un punto genérico, corta a la curva en un punto ulterior. tal que dista el doble del punto donde la tangente es cortada por la normal en el punto de inflexión, de los que este punto de intersección dista del punto de contacto; quedando separados el punto de contacto de la tangente y el ulterior punto de intersección con la cúbica, por el punto de la normal, mencionado* (Fig. 1).

Esta propiedad se generaliza a cualquier parábola cúbica, aunque la normal, en el punto de inflexión, ya no tiene el papel del caso particular anterior, sino que, en su lugar, se encuentra el eje Y, que es para la ecuación reducida de la parábola cúbica, la recta que pasa por el punto de inflexión de la parábola cúbica y por el punto impropio de ésta.

Cuando la parábola cúbica general, de ecuación

$$y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d,$$

se refiere a unos ejes cartesianos, tales que el origen sea el punto de

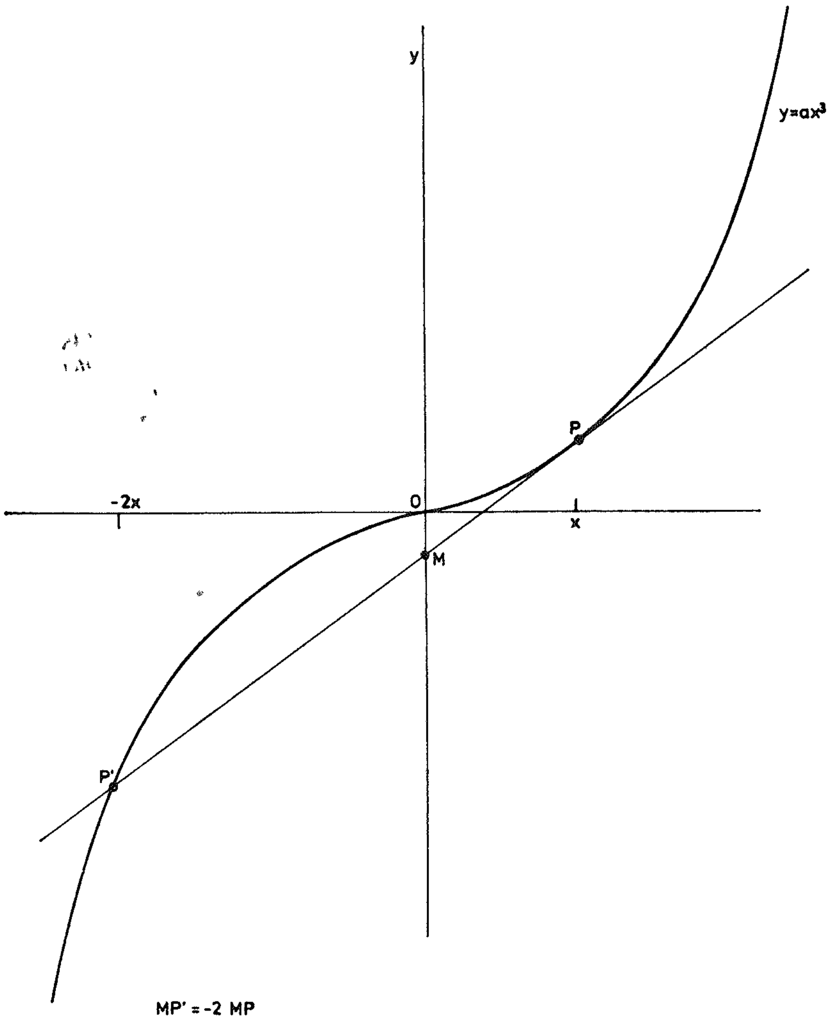

Fig. 1.

inflexión de la cúbica y el eje Y, la recta que pasa por dicho punto y el impropio de la cúbica, la ecuación reducida de la parábola cúbica es

$$Y = a\,X^3 + B\,X \quad , \quad B = y'(x_0) \quad , \quad y''(x_0) = 0$$

Para toda parábola cúbica plana, cuya ecuación reducida ya sabemos es de la forma

$$y = a\,x^3 + b\,x$$

la intersección de la tangente genérica y la curva, en un punto ulterior al de contacto, está dada por la solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} Y - (ax^3 + bx) &= (3a\,x^2 + b)\,(X - x) \\ Y &= a\,X^3 + b\,X \end{aligned}\right\}$$

siendo la ecuación correspondiente a las abscisas la siguiente, incluyendo, naturalmente, el punto de contacto:

$$aX^3 + bX - (ax^3 + bx) = (3ax^2 + b)\,(X - x)$$

La solución $X = x$ será raíz doble, por lo dicho; la otra es $X = -2x$. Así, pues, se concluye: *Para toda parábola cúbica, la tangente en un punto arbitrario, corta a la curva en un punto ulterior al punto de contacto que dista el doble del punto, donde dicha tangente corta a la recta que pasa por el punto de inflexión y el impropio de la cúbica, que este punto dista del punto de contacto de la tangente; separando estos dos puntos de la cúbica la recta incidente con el punto de inflexión y el impropio de la cúbica.*

Cúbicas planas con un punto de retroceso impropio y un punto de inflexión propio: ecuación reducida. Parábola cúbica

La parábola cúbica plana, como es sabido, tiene un punto de retroceso impropio y un punto de inflexión propio.

Con objeto de caracterizar las parábolas cúbicas entre las cúbicas planas, vamos a obtener la ecuación reducida de las cúbicas planas con aquellas dos propiedades.

Si el punto de retroceso lo tomamos como (0, 1, 0) y el de inflexión como (0, 0, 1), en la ecuación general de la cúbica

$$\sum_{i+k \leqslant 3} a_{ik}\, x^i\, y^k\, t^{3-i-k} = 0$$

los coeficientes han de satisfacer las ecuaciones

$$f'_x(0, 1, 0) = 0$$

$$f'_y(0, 1, 0) = 0$$

$$f'_t(0, 1, 0) = 0$$

$$f'_x = 3a_{30}\,x^2 + 2a_{21}\,xy + a_{12}\,y^2 + 2a_{20}\,xt + a_{11}\,yt + a_{10}\,t^2$$

$$f'_y = 3a_{03}\,y^2 + a_{21}\,x^2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{02}\,yt + a_{11}\,xt + a_{01}\,t^2$$

$$f'_t = a_{20}\,x^2 + a_{02}\,y^2 + a_{11}\,xy + 2a_{10}\,xt + 2a_{01}\,yt$$

de donde la condición de punto doble se traduce en

$$a_{12} = a_{03} = a_{02} = 0.$$

Por ser éste punto de retroceso, hay una recta única, pasando por (0, 1, 0), que tiene un contacto tripunto con la cubica. Una recta tal es de la forma.

$$t = m x.$$

Expresemos el contacto señalado:

$$\left.\begin{aligned} a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{10} x + a_{01} y &= 0 \\ t &= m x \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2(a_{30} x + a_{21} y + a_{20} mx + a_{11} my + a_{10} m^2 x + a_{01} m^2 y) &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

El punto (0, 1, 0) es una solución doble y la otra es la intersección de las dos rectas.

$$a_{30} x + a_{21} y + a_{20} mx + a_{11} my + a_{10} m^2 x + a_{01} m^2 y = 0 \quad , \quad t = 0.$$

También ha de ser el punto (0, 1, 0) el de intersección de estas dos rectas; por tanto, se verifica

$$a_{21} + a_{11} m + a_{01} m^2 = 0,$$

pero por ser punto de retroceso, sólo hay una tangente (doble) en dicho punto, lo cual exige

$$a^2_{11} - 4\, a_{01}\, a_{21} = 0.$$

La condición de que (0, 0, 1) sea punto real de inflexión se expresa imponiendo que el sistema

$$\left.\begin{aligned} a_{30} x^3 + a_{20} x^2 + a_{10} x + (a_{21} x^2 + a_{11} x + a_{01})\, y &= 0 \\ y &= m x \end{aligned}\right\}$$

tenga solución triple en aquel punto. Por tanto, se verifica que la recta es tangente a la cúbica, siendo el contacto bipunto, al menos, es decir,

$$a_{10} + a_{01} m = 0.$$

La inflexión en (0, 0, 1) se impondrá mediante un contacto tripunto de la cúbica y recta consideradas, o sea,

$$a_{20} + a_{11} m = 0.$$

Las ecuaciones

$$a_{10} + a_{01} m = 0$$

$$a_{20} + a_{11} m = 0$$

al admitir la misma solución, m, implican

$$\frac{a_{20}}{a_{10}} = \frac{a_{11}}{a_{01}}.$$

Así, pues, reuniendo los distintos resultados logrados, la cúbica, con un retroceso en el punto impropio real (0, 1, 0) y una inflexión en el punto propio real (0, 0, 1), se caracteriza analíticamente por las condiciones

$$a_{12} = a_{03} = a_{02} = 0 \; ; \; a^2_{11} - 4\, a_{01}\, a_{21} = 0 \; ; \; \frac{a_{20}}{a_{10}} = \frac{a_{11}}{a_{01}}$$

denominando c la constante de proporcionalidad de $a_{20}/a_{10} = a_{11}/a_{01}$, y sosteniendo la irreducibilidad de la cúbica, $a_{01} \neq 0$, su ecuación es, dada la forma de los coeficientes,

$$a_{12} = a_{03} = a_{02} = 0 \; ; \; a_{20} = c\, a_{10} \, , \; a_{11} = c\, a_{01} \; ; \; a_{21} = \frac{c^2}{4}\, a_{01}$$

$$o_{30}\, x^3 + c\, a_{10}\, x^2 + a_{10}\, x + \qquad + a_{01} \left(\frac{c}{2}\, x + 1 \right)^2 y = 0$$

ecuación de las cúbicas con un punto de retroceso impropio real y un punto de inflexión propio real.

En esta clase afín de cúbicas está incluida la parábola cúbica cuya ecuación se presenta cuando $c = 0$, y su significado geométrico consiste en que el punto de inflexión es centro de la curva. En efecto, para que los puntos de la curva se distribuyan simétricamente, respecto al punto de inflexión 0 de la curva irreducible, ha de ser

$$(a_{01} \neq 0) \wedge (c\, a_{10} = c\, a_{01} = 0) \iff c = 0.$$

De donde

$$a_{30}\, x^3 + a_{10}\, x + a_{01}\, y = 0$$

ecuación de la parábola cúbica. Por ello, podemos dar la siguiente caracterización, en el plano proyectivo-afín de la parábola cúbica:

Es una cúbica irreducible, con un punto impropio real de retroceso y un punto propio real de inflexión, el cual es centro de la curva.

Caracterización afín de la parábola cúbica, mediante la propiedad de la tangente y el ulterior punto de intersección con la cúbica

Las cúbicas, de la clase afín, con un punto de retroceso impropio real y un punto de inflexión propio real, presentan la ecuación canónica

$$a_{30}\, x^3 + c\, a_{10}\, x^2 + a_{10}\, x + a_{01} \left(\frac{c}{2}\, x + 1 \right)^2 y = 0.$$

Ahora analizamos cuáles curvas de éstas tienen la propiedad de la tangente y el ulterior punto de intersección de la parábola cúbica. Es

decir, el punto donde la tangente de punto de contacto (x, y) y el otro punto donde la cúbica es cortada, por dicha tangente, ha de ser $(-2x, Y)$ de abscisa $-2x$.

La tangente en un punto genérico (x, y) de la cúbica es

$$Y - y = y'(X - x),$$

siendo

$$y = -\frac{a_{30}x^3 + ca_{10}x^2 + a_{10}x}{a_{01}\left(\frac{c}{2}x + 1\right)^2} \quad ; \quad y' =$$

$$-\frac{ca_{30}x^3 + 6a_{30}x^2 + 3ca_{10}x + 2a_{10}}{2a_{01}\left(\frac{c}{2}x + 1\right)^3}$$

$$Y + \frac{a_{30}x^3 + ca_{10}x^2 + a_{10}x}{a_{01}\left(\frac{c}{2}x + 1\right)^2} = -$$

$$-\frac{ca_{30}x^3 + 6a_{30}x^2 + 3ca_{10}x + 2a_{10}}{2a_{01}\left(\frac{c}{2}x + 1\right)^3}(X - x)$$

Expresemos que el otro punto, situado sobre la tangente de la curva, distinto del punto de contacto es

$$X = -2x$$

donde éstas son sus coordenadas

$$Y = Y(-2x)$$

en la cúbica.

Así, pues, se verifica, idénticamente en x, la ecuación

$$\frac{8a_{30}x^3 - 4ca_{10}x^2 + 2a_{10}x}{a_{01}(cx - 1)^2} = -$$

$$-\frac{ca_{30}x^3 + 6a_{30}x^2 + 3ca_{10}x + 2a_{10}}{2a_{01}\left(\frac{c}{2}x + 1\right)^3}(-2x - x)$$

Operaciones racionales y simplificaciones, nos conducen a la siguiente identidad polinómica

$$2\left(\frac{c}{2}x+1\right)^3(8a_{30}\,x^2-4ca_{10}\,x+2a_{10}) = (cx-1)^2\,[2ca_{30}\,x^3+$$

$$+\,(16a_{30}-c^2a_{10})\,x^2+6ca_{10}\,x+4a_{10}]$$

la cual se verifica con el valor $c = 0$. Cuando $c \neq 0$, $1/c$ es raíz doble del polinomio, $-2/c$ es raíz triple del mismo; de donde se infiere que el polinomio de 2.º grado

$$8\,a_{30}\,x^2-4\,ca_{10}\,x+2\,a_{10}$$

ha de tener la raíz doble, $x = 1/c$, lo cual equivale a la relación

$$4\,a_{30} = c^2\,a_{10}.$$

Del mismo modo, el polinomio de 3er. grado

$$2\,ca_{30}\,x^3+(16\,a_{30}-c^2\,a_{10})\,x^2+6\,ca_{10}\,x+4\,a_{10}$$

ha de tener la raíz triple, $x = -2/c$, implicando nuevamente la relación

$$4\,a_{30} = c^2\,a_{10}.$$

En el caso de $c \neq 0$, la identidad polinómica se refleja en la ecuación cúbica, en la forma

$$\left(\frac{c}{2}x+1\right)^2(a_{10}\,x+a_{01}\,y) = 0,$$

y la cúbica se ha reducido a tres rectas, una de ellas, doble. Para esta cúbica, reducible a rectas, la propiedad de la tangente de la parábola cúbica, se verifica trivialmente.

Ya que la mencionada propiedad de la tangente, en la clase afín de cúbicas irreducibles, de ecuación canónica

$$a_{30}\,x^3+c\,a_{10}\,x^2+a_{10}\,x+a_{01}\left(\frac{c}{2}x+1\right)^2y = 0,$$

solamente es posible con $c = 0$, podemos dar la caracterización de la parábola cúbica, en los siguientes términos:

La parábola cúbica es la curva de tercer orden irreducible, con un punto impropio real de retroceso, un punto propio real de inflexión y tal que cada tangente a la cúbica corta a la misma en un punto tal, que la razón simple, del punto de intersección de la tangente con la recta que pasa por el punto de inflexión, en la dirección del punto impropio de retroceso, al punto de intersección de la tangente con la cúbica y al punto de contacto con ella, sea —2.