# NOTAS SOBRE LA TEORIA DE LA DIMENSION PARA RETICULOS

por

JOSE M.ª BRUNAT

En las *Notas para un curso de geometría lineal y proyectiva*, de S. Xambó, publicadas por el departamento de Algebra y Fundamentos de la Universidad Autónoma de Barcelona, se desarrollan, entre otras, las teorías de la longitud para módulos y de la dimensión para variedades proyectivas, y se sugiere la posibilidad de englobar ambas en otra más general para retículos. Hacer efectiva tal posibilidad es lo que pretendemos aquí.

## CONCEPTO DE DIMENSION

Sea X un retículo, $\leqslant$ su relación de orden y $+\,,\,\cdot$ las operaciones reticulares

$$x + y = \sup\{x, y\} \quad , \quad x \cdot y = \inf\{x, y\}$$

Una extensión simple es una desigualdad estricta, $x < y$, tal que no existe ningún $z$ que verifique $x < z < y$. Equivalentemente, si

$$x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow x = z \quad \text{ó} \quad z = y$$

Supongamos que X tiene mínimo 0 y sea $x \in \mathrm{X}$. Una bandera de $x$ es una sucesión de extensiones simples de la forma

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$$

$n$ se llama la longitud de la bandera.

Si $x$ tiene banderas, su dimensión, $d(x)$, es el mínimo de las longitudes de todas las banderas de $x$. Si $x$ es el mínimo, su dimensión es cero. Si $x$ carece de banderas, su dimensión es $+\infty$.

En lo sucesivo, hablar de la dimensión de un elemento presupondrá que es finita.

*Lema.* Sea X un retículo modular. Si $x < y$ es simple, entonces, para cada $z$, se verifica

$$x \cdot z = y \cdot z$$

o bien $zx < y \cdot z$ es simple.

Demostración:

Consideremos un $t$ tal que $xz \leqslant t \leqslant yz$. Por ser X modular

$$t \leqslant z \Rightarrow (z \cdot x) + t = z \cdot (x + t)$$

Teniendo en cuenta que

$$x < y \quad , \quad t \leqslant y \Rightarrow x \leqslant x + t \leqslant y$$

y que la extensión $x < y$ es simple, caben dos posibilidades:
1.ª $x = x + t$. Entonces

$$(z \cdot x) + t = z \cdot (x + t) = z \cdot x \Leftrightarrow t \leqslant z \cdot x$$

Tenemos, pues $x \cdot z \leqslant t \leqslant z \cdot x$, de donde $t = z \cdot x$.

2.ª $x + t = y$. Usando $x \cdot z \leqslant t$, obtenemos

$$t = (z \cdot x) + t = z \cdot (x + t) = z \cdot y$$

*Teorema 1.* Sea X un retículo modular con mínimo 0. Entonces:

(a) $x \leqslant y \Rightarrow d(x) \leqslant d(y)$ y vale la igualdad si y sólo se $x = y$.
(b) Todas las banderas de $x$ tienen la misma longitud.

Demostración:

Consideremos una bandera de $y$ de longitud $n = d(y)$

$$0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = y$$

En virtud del lema, cada desigualdad de la cadena

$$0 = y_0 \cdot x \leqslant y_1 \cdot x \leqslant \ldots \leqslant y_n \cdot x = x$$

es o una igualdad o una extensión simple. Suprimiendo los términos repetidos, obtendremos, pues, una bandera de longitud $\leqslant n$, luego

$$d(x) \leqslant d(y)$$

Si $d(x) = d(y)$ todas las desigualdades de la cadena anterior son simples. Veamos por recurrencia que se verifica

$$y_i = y_i\, x \qquad i = 0, \ldots, n$$

Para $i = 0$ es trivial. Supongamos que la igualdad es cierta para $i$ y de mostrémosla para $i + 1$. Tenemos

$$y_i \leqslant x \quad , \quad y_i < y_{i+1} \Rightarrow y_i \leqslant y_{i+1} \cdot x \leqslant y_{i+1}$$

y como $y_i < y_{i+1}$ es simple, pueden sólo presentarse dos casos.

1.º $y_{i+1} = y_i \cdot x$. Entonces

$$y_i \cdot x = y_{i+1} \cdot x$$

y en la cadena hay repeticiones, lo que es absurdo.

2.º $y_{i+1} \cdot x = y_{i+1}$, como pretendíamos probar.

En particular, para $i = n$ tenemos

$$y = y_n = y_n \cdot x = y \cdot x = x$$

(b) Demostraremos que si $0 = z_0 < z_1 < \ldots < z_m = x$ es una bandera cualquiera de $x$, entonces $m = d(x)$.

Para $m = 0$ es obvio. Supongámoslo cierto para los $k < m$. Sea

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$$

una bandera de $x$ con $n = d(x)$. Por definición de dimensión $n \leqslant m$. Si fuera $n < m$. Consideremos

$$z_0 < \ldots . < z_n$$

que es una bandera de $z_n$ de longitud menor que $m$, luego $n = d\,(z_n) = d(x_n)$, y por tanto, $z_n = x$. Entonces $z_n = z_{n+i}$ y

$$0 = z_0 < \ldots < z_n < \ldots < z_m = x$$

no es una bandera, lo que es absurdo.

En virtud de la segunda parte del anterior teorema, la dimensión de un elemento es la longitud de una cualquiera de sus banderas.

## COCIENTES

Sean $x \leqslant y$ elementos de un retículo X. El cociente $y/x$ se define por

$$y/x = \{z \in \mathbf{X}\ ;\ x \leqslant z \leqslant y\}$$

Evidentemente, $y/x$ es cerrado para las operaciones reticulares, tiene máximo, que es $y$, y mínimo, que es $x$. Pondremos $d(y/x)$ para indicar la dimensión de $y$ en $y/x$.

*Teorema 2.* Sea X un retículo modular con 0 y sean $x \leqslant y$.

Entonces se verifica

$$d(y/x) = d(y) - d(x)$$

Demostración:

Si

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$$

es una bandera de $x$ y

$$x < y_1 < \ldots < y_m = y$$

es una bandera de $y$ como elemento de ${}^{y}/_{x}$ (luego, $m = d({}^{y}/_{x})$ ), entonces

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < y_1 < \ldots < y_m = y$$

es una bandera de $y$ como elemento de X, de donde

$$d(y) = d({}^{y}/_{x}) + d(x)$$

como queríamos demostrar.

*Teorema 3.* Sea X un retículo modular y $x, y \in \mathbf{X}$. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} {}^{x}/_{x \cdot y} &\longrightarrow {}^{x+y}/_{y} \\ z &\longrightarrow z + y \end{aligned}$$

es un isomorfismo reticular.

Demostración:

Trivialmente está bien definida y es morfismo reticular.

Es inyectivo: Si $y + z = y + z^1$, multiplicando por $x$ y teniendo en cuenta que es modular se obtiene

$$x \cdot (y + z) = x \cdot (y + z^1) \Longrightarrow x \cdot y + z = x \cdot y + z^1 \Longrightarrow z = z^1$$

Es exhaustivo: Sea $z^1$ con $y \leqslant z^1 \leqslant x + y$. Tomemos $z = z^1 \cdot x$.

$$x \cdot y \leqslant x \cdot z^1 \leqslant x \Longrightarrow z = z^1 \cdot x \in {}^{x}/_{x \cdot y}$$

$$z + y = z^1 \cdot x + y = z^1 (x + y) = z^1$$

y $z$ es anti-imagen de $z^1$.

*Corolario 1.* Sea X un retículo modular con mínimo y $x, y \in \mathbf{X}$. Entonces

$$d(x) + d(y) = d(x + y) + d(x \cdot y)$$

Demostración:

$$d(x) - d(x \cdot y) = d({}^{x}/_{x \cdot y}) = d({}^{x+y}/_{y}) = d(x + y) - d(y)$$

*Corolario 2.* Sea X un retículo modular y complementado.

Si $u$ es el máximo de X y $\overline{x}$ un complemento de $x$, se verifica

$$d(x) + d(\overline{x}) = d(u)$$

Demostración:

$$d(\overline{x}) = d(\overline{x}) - 0 = d({}^{\overline{x}}/_{0}) = d({}^{x+\overline{x}}/_{x}) = d({}^{u}/_{x}) = d(u) - d(x)$$

SIMPLICES

Sea X un retículo con mínimo $o$. Un elemento $a$ es un átomo si $o < a$ es simple. El retículo se llama atómico si para cada $x \neq o$ existe un átomo $a$ tal que $a \leqslant x$.

* En todo este apartado supondremos que X es un retículo modular atómico y complementado, $\bar{x}$ denotará un complemento de $x$. Además, supondremos conocida la siguiente caracterización de un retículo modular: X es modular si y sólo si para cada tres elementos $x, y, z \in \mathrm{X}$, tales que

$$x \geqslant z \quad , \quad x + y = z + y \quad , \quad x \cdot y = z \cdot y$$

se verifica $x = z$.

*Lema.* Si $o < y < x$, existe un átomo $a$ tal que $a \nleqslant y$ y $a < x$.

Demostración:

$$y < x \Longrightarrow u = y + \bar{y} < x + \bar{y} \Longleftrightarrow u = x + \bar{y}$$

Consideremos $x \cdot \bar{y}$. Si fuera $x \cdot \bar{y} = 0$, tendríamos

$$y < x \quad , \quad x + \bar{y} = u = y + \bar{y} \quad , \quad x \cdot \bar{y} = o = y \cdot \bar{y}$$

y por ser el retículo modular $y = x$ lo que es absurdo.

Luego $x \cdot \bar{y} \neq o$ y existe un átomo $a$ con $a < x \cdot \bar{y}$. Entonces, $a < x$.
Veamos que $a \nleqslant y$. Si no fuera así, tendríamos

$$a \leqslant y \quad , \quad a < x \cdot \bar{y} < \bar{y} \Longrightarrow a \leqslant \bar{y} \cdot y = o \Longrightarrow a = o$$

lo que es absurdo.

*Teorema 4.* Sea $o < x$. Entonces, $x < y$ es simple si y sólo si para cada átomo, tal que $a \nleqslant x \quad , \quad a \leqslant y$ es $x + a = y$.

Demostración:

Sea $x < y$ simple. Si existiera un átomo $a$ tal que

$$a \nleqslant x \quad , \quad a \leqslant y \quad , \quad x + a \neq y$$

se verificaría $x < a + x < y$ y la extensión $x < y$ no sería simple.

Recíprocamente, si se cumple la condición y $x < y$ no es simple existe un $t$ con $x < t < y$. Como $x < t$ existe un átomo $a$ tal que $a \nleqslant x$, $a < t$. Este átomo verifica $a + x \leqslant t < y$, contra hipótesis.

Denominaremos símplice de un elemento $x$ a un sistema de átomos $a_1, \ldots, a_n$. tales que

$$a_i \nleqslant a_1 + \ldots + a_{i-1} \quad \forall i \quad \text{y} \quad a_1 + \ldots + a_n = x$$

*Teorema 5.* $d(x) = n$ si y sólo si existe un símplice de $x$ con $n$ elementos $a_1, \ldots, a_n$.

Demostración:

Supongamos $d(x) = n$ y sea

$$o = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$$

una bandera de $x$.

Tomemos $a_1 = x_1$, que es un átomo, y para cada $i > 1$ un $a_i$, tal que

$$a_i \nleq x_{i-1} \quad \text{y} \quad a_i < x_i$$

Como las extensiones $x_{i-1} < x_i$ son simples, tenemos

$$x_{i-1} + a_i = x_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

de donde

$$a_1 + \ldots + a_i = x_i$$

Entonces

$$a_i \nleq x_{i-1} = a_1 + \ldots + a_{i-1} \quad \text{y} \quad a_1 + \ldots + a_n = x_n = x$$

por lo que $a_1, \ldots, a_n$ es un símplice de $x$.

Recíprocamente, sea $a_1, \ldots, a_n$ un símplice de $x$. Definamos

$$x_0 = o \qquad x_i = a_1 + \ldots + ai \qquad i = 1, \ldots, n$$

Como $a_i \leqslant x_i$ y $a_i \nleq x_{i-1}$ la desigualdad $x_{i-1} < x_i$ es estricta. Bastará demostrar que es simple y entonces

$$x_0 < \ldots . < x_n$$

será una bandera de $x$. Observemos, en primer lugar, que $x_{i-1}\, a_i = o$. En efecto, por ser $a_i$ un átomo $x_{i-1}\, a_i$ es $o$ ó $a_i$; en el segundo caso, $a_i \leqslant x_{-i1}$, lo que va contra la elección de $a_i$.

Veamos ahora que $x_{i-1} < x_i$ es simple usando la caracterización dada en el Teorema 4. Sea $a$ un átomo con

$$a \nleq x_{-1} \quad , \quad a < x_i$$

Debemos probar que $z = x_{i-1} + a = x_i$. Consideremos $z \cdot a_i$. Si $z \cdot a_i = o$, entonces

$$z \geqslant x_{i-1}\, ,\ z \cdot a_i = o = x_{i-1}\, a_i\, ,\ z + a_i = x_{i-1} + a + a_i = x_{i-1} + a_i$$

luego

$$z = x_{i-1}$$

de donde

$$x_{i-1} + a = x_{i-1} \quad \text{y} \quad a \leqslant x_{i-1}$$

lo que es absurdo.

En consecuencia, $z \cdot a_i = a_i$ y tenemos

$$x_{i-1} \leqslant z \quad , \quad a_i \leqslant z \Rightarrow x_i = x_{i-1} + a_i \leqslant z$$

Teniendo en cuenta $z \leqslant x_i$, concluimos $z = x_i$.

*Corolario.* Si $x < y$, $d(y) = n$ y $a_1, \ldots, a_m$ es un símplice de $x$, entonces existen átomos $a_{m+1}, \ldots, a_n$ tales que $a_1, \ldots, a_n$ es un símplice de $y$.

Demostración:

Puesto que $a_1 + \ldots + a_m < y$, existe un átomo $a_{m+1}$ con

$$a_{m+1} \nleqslant a_1 + \ldots + a_m \quad \text{y} \quad a_{m+1} < y$$

Entonces $a_1, \ldots, a_{m+1}$ es un símplice de su suma, que es $\leqslant y$, y de dimensión $m + 1$. Reiterando el razonamiento, $a_1, \ldots, a_n$ es un símplice de su suma, que tiene dimensión $n$ y es menor que $y$, por lo que coinciden.

*Nota.* Si un retículo es modular (respectivamente, complementado), lo mismo ocurre con cualquier cociente $y/x$, $x < y$. como se demuestra sin excesiva dificultad. Además, si el retículo es atómico, también lo son los cocientes $y/x$ y los átomos de $\overline{y/x}$ son los $x + a$ con $a$ átomo del retículo, tal que $a \nleqslant x$ y $a \leqslant y$. En virtud de lo anterior, los teoremas 4 y 5 son aplicables a todo cociente de un retículo moduar complementario y atómico.

## .APLICACIONES

### 1. Conjuntos

Consideremos el retículo de las partes de un conjunto A, $\mathbf{X} = \mathbf{P}(A)$. Se trata de un retículo modular, complementado y atómico. Los átomos son los $\{a\}$ con $a \in A$. Para este retículo, pues, es válida toda la teoría anterior sin restricciones. Una parte $x$ de A es finita si y sólo si su dimensión es finita; en tal caso, su dimensión coincide con su cardinal. ElCorolario 1 del Teorema 3 se traduce, en este caso, por la fórmula

$$\mathrm{Card}(x \cup y) + \mathrm{Card}(x \cap y) = \mathrm{Card}(x) + \mathrm{Card}(y)$$

### 2. Módulos

Sea M un A-módulo y X el retículo de sus submódulos. Es un retículo modular con máximo, M, y mínimo, $\{o\}$. Sin embargo, en general, no es complementado ni atómico: basta considerar el ejemplo de Z. Podemos aplicar a este retículo los resultados obtenidos en los dos primeros apartados. A menudo, el término «dimensión» se sustituye en este caso por el de «longitud».

Para aplicar las fórmulas del cociente, designemos por ${}^{M}/_{N}$ el cociente algebraico de M por su submódulo N, y por $\mathbf{V}({}^{M}/_{N})$ al retículo de sus submódulos. Si

$$P : M \longrightarrow {}^{M}/_{N}$$

es la proyección canónica, entonces

$$
\begin{aligned}
{}^{M}/_{N} &\longrightarrow V({}^{M}\!\int_{N}) \\
U &\longrightarrow P(U)
\end{aligned}
$$

es un isomorfismo reticular, e igualando las dimensiones de los máximos de cada retículo, se obtiene $d({}^{M}/_{N}) = d({}^{M}\!\int_{N})$. Según el Teorema 2,

$$d({}^{M}/_{N}) = d(M) - d(N)$$

luego,

$$d({}^{M}\!\int_{N}) = d(M) - d(N)$$

Además, aplicando el Corolario 1 del Teorema 2, se obtiene la fórmula de Grassmann:

$$d(N + P) + d(N \cap P) = d(N) + d(P)$$

## 3. Espacios vectoriales

Sea X el retículo de los subespacios de un espacio vectorial F sobre un cuerpo K. Las consideraciones del ejemplo anterior son válidas aquí, pero, además, en este caso, el retículo X es complementado y atómico, siendo los átomos los subespacios de la forma $\{\lambda x \,;\, \lambda \in k\} = < x >$ con $x \neq o$. En este retículo es válida, pues, toda la teoría anterior. Los símplices se caracterizan fácilmente·

$$<x_1> \; , \; \ldots \; , \; <x_n>$$

es un símplice de F si y sólo si $x_1, \ldots, x_n$ es una base.

Omitimos la demostración, que es sencilla, y señalamos que el Corolario del Teorema 5 proporciona una demostración trivial del teorema de Steinitz.

## 4. Variedades proyectivas

Se presentan las mismas circunstancias que en el caso anterior. Los átomos, en este ejemplo, son los puntos.

Por razones obvias, se pretende que los puntos tengan dimensión cero y las rectas, dimensión 1. Para ello se distingue la dimensión de una subvariedad F, $d(F)$, de la dimensión proyectiva de tal subvariedad, $d_p(F)$, definida por

$$d_p(F) = d(F) - 1$$

Todas las fórmulas válidas para la dimensión habitual lo son también para la dimensión proyectiva, y las dimensiones proyectivas de un punto y de una recta son 0 y 1 como se pretendía.

REFERENCIAS

1. *Notas para un curso de geometría lineal y proyectiva* S. XAMBÓ, Departamento de Algebra y Fundamentos de la Universidad Autónoma de Barcelona.

2. *Curso de Probabilidades*, F. SALES, Facultad de Matemáticas, Barcelona.

De **1** se ha sacado la idea del artículo. En 2 pueden verse todas las definiciones y propiedades sobre retículos que hemos dado por conocidas.