CONSTRUIR UN TRIANGULO CUALQUIERA DADAS LAS TRES BISECTRICES

por

Luis Goiri Novales

En general, las tres bisectrices son otras tantas Cevianas del triángulo, como lo son las alturas y las medianas. Pero así como en el caso de estas últimas, las relaciones que las ligan a los lados del triángulo son sencillas, en el caso de las bisectrices no es así y de allí que, para intentar su construcción en este caso, tengamos que acudır, una vez más, a contemplar las propiedades de la familia proyectiva triangular.

Este propósito de seguir ahondando, en el aparente pozo sin fondo de esta familia, nos ha llevado a encontrar un camino viable para su solución, que hasta el presente no había sido atacada por los insignes tratadistas, que han profundizado en el tema, como aparece en los anales de Gergonne, Rouché-Comberouse, etc.

En este supuesto, consideremos en la figura 1 el problema ya resuelto. Sea, pues, el triángulo ABC. Trazamos sus bisectrices. que se cortarán en el Incentro I. Sean, pues, éstas, AM, BN y CP. Trazamos ahora la normal a V_a en A, hasta que corte a V_b y V_c en sendos puntos B′ y C′.

Las cuaternas BINB′ y CIPC′ son, desde luego, harmónicas. Se pueden considerar como secciones del haz de vértice A, cuyos rayos homólogos son siempre los que forman el mismo ángulo con la bisectriz V_a, es decır, los AB′ y AC′ ángulos rectos, los AB y AC por ser V_a bisectriz, etcétera. El Incentro I es común a ambas cuaternas y como los rayos AB′ y AC′ están en prolongación, desde luego tanto los dos haces como las dos cuaternas, son perspectivas.

Si proyectamos ahora dichas cuaternas, desde M extremo de V_a sobre la base rectilínea B′AC′ obtendremos, sin duda, series rectilíneas, a, a', b, b' etcétera, perspectivas también. Si hacemos pasar una circunferencia cualquiera por AM (en la figura, por comodidad, lo hemos hecho con la que tiene AM por diámetro) y proyectamos ahora las series a, a', b, b' etc., sobre esa circunferencia obtendremos dos series circulares perspectivas también. Los puntos B y C de las cuaternas descritas, al comienzo, son homólogos, como sabemos; los rayos MB y MC están en prolongación y, en consecuencia, incidirán sobre la base B'A C' en el punto doble de las series rectilíneas *a*, *a'*, *b*, *b'*, además del A, el cual, proyectado desde M, nos dará también el punto doble *d*, *d'* de las series circulares referidas, que estará en la tangente a la circunferencia AM trazada desde el punto FG de Fregier de las series circulares apuntadas, que es propio y se puede obtener fácilmente, como se aprecia en la figura 1 misma.

TRIANGULO SOLUCION DE BISECTRICES

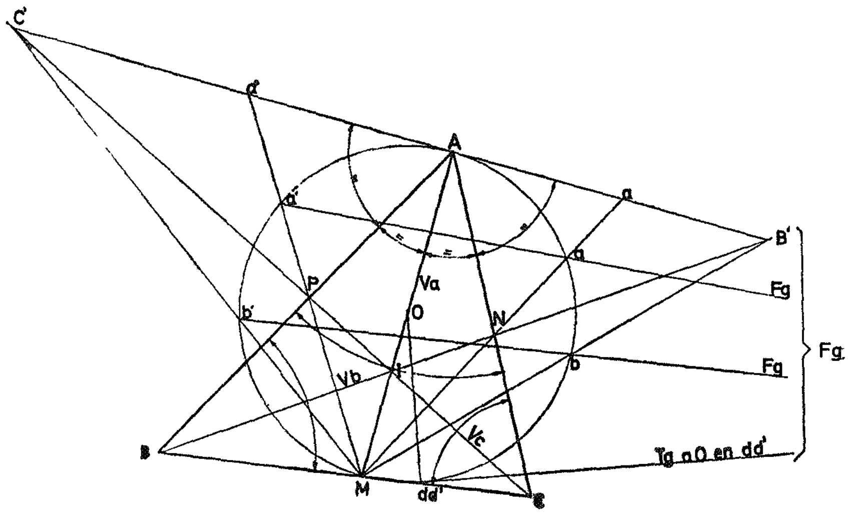

Fig. 1

En ésta solamente conocemos de momento las magnitudes de las tres bisectrices, o sea AM, BN y CP.

Supongamos que hubiéramos trazado en ella (no se ha hecho para no complicarla) las circunferencias ABN y ACP, que no son sino los arcos capaces del ángulo A sobre V_b y V_c, respectivamente. Se cortarán en A y otro punto.

Si ahora (figura 2) construimos un cierto triángulo, A'B'C', en el que hemos tomado las bisectrices por alturas, tenemos que se cortarán en el ortocentro H'. Sean M'N'P' los pies de estas alturas, que serán, a su vez, como sabemos, bisectrices del triángulo órtico del A'B'C', que es el M'N'P'. La figura 2, formada por el triángulo A'B'C' y su órtico M'N'P', en el que las alturas son en verdadera magnitud las bisectrices del triángulo ABC, goza de las mismas propiedades proyectivas que la figura 1. En efecto: Las cuaternas B'Q'H'N' y C'R'H'P' son también harmónicas y perspectivas, tienen el punto H' común y son secciones del haz M' con rayos M'B' y M'C' en prolongación. Los rayos M'N' y M'P' son homólogos por formar ángulos iguales con M'A'. Las circunferencias que pasan por B'M'N'A' y C'M'P'A' son también los arcos capaces del ángulo B'M'N' =

TRIANGULO DE ALTURAS

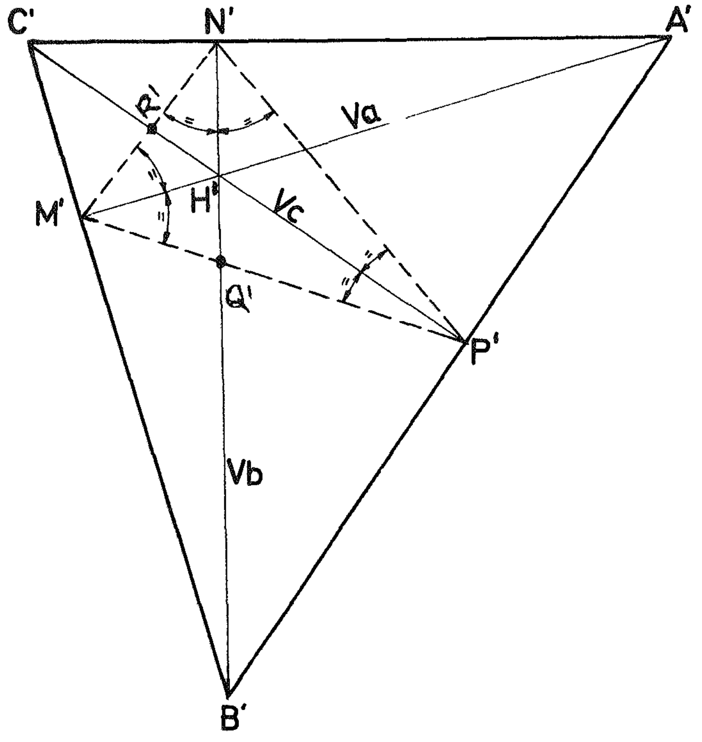

Fig. 2

= C′M′P′ sobre V_b y V_c, respectivamente, que, como V_a, están en verdadera magnitud.

Pasemos ahora a la figura 3, en la que vemos el triángulo A′B′C′.

Hemos trazado, pues, la circunferencia de diámetro A′M′ = V_a, como en la figura 1. Trazamos también las circunferencias de radio KV_b y KV_c, que pasan por los puntos B′M′N′A′ y C′M′P′A′, respectivamente. Al igual que en la figura 1, los rayos M′B′ y M′C′ seguirán siendo homólogos, así como los rayos M′P′ y M′N′, por formar ángulos iguales con M′A′, o sea V_a. Si trazamos nuevos rayos M′S y M′S′ que formen ángulos iguales α con los M′N′ y M′P′, los rayos M′S y M′S′ seguirán siendo homólogos y V_a su bisectriz. Proyectamos ahora los puntos homólogos P′N′, S y S′ sobre la circunferencia M′A′. Obtendremos dos series circulares perspectivas, a, a', b, b', que por la igualdad de los ángulos α tienen un punto de Fregier impropio $F_g\ \infty$. Como la proyección la hemos hecho desde A′, si ahora trazamos desde $F_g\ \infty$ las tangentes a A′M′, obtendremos el punto doble de las series circulares d d', que, unido con A′ vértice de la proyección, nos dará los puntos X e Y sobre las circunferencias de radios KV_b y KV_c respectivamente. Al igual que M'P' y M'N' eran rayos homólogos, también lo serán M'X y M'Y, pero al estar X e Y en prolongación con A', el ángulo XM'Y que cumple con todas las propiedades métricas y proyectivas del A de la figura , deberá ser igual a él en magnitud, si bien no tendrá por qué serlo en posición.

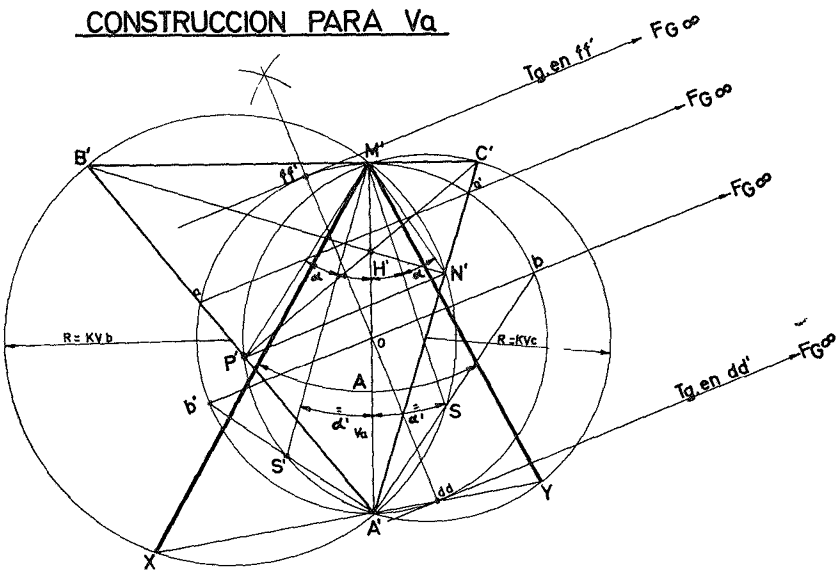

Fig. 3

Repetimos ahora en la figura 4 la misma construcción para la bisectriz V_b, partiendo del mismo triángulo auxiliar A'B'C' y obtendremos el ángulo B en verdadera magnitud. Lo mismo podíamos haber hecho con V_c y obtener el ángulo C, si bien determinados ya A y B, como sabemos, C estará ya definido, por ser suplementario de la suma A + B.

Determinados así los tres ángulos de ABC, construiremos un triángulo semejante a él, en el que trazaremos las bisectrices. Llevaremos sobre la del ángulo A la V_a en verdadera magnitud y las paralelas trazadas por M al tercer lado, nos darán el triángulo definitivo ABC. No describimos esta construcción por ser evidente y elemental.

Casos particulares.

El triángulo rectángulo no ofrece ninguna novedad respecto del general. En el triángulo isósceles, como $Vb = V_c$ y $\widehat{B} = \widehat{C}$, nos bastará,

CONSTRUCCION PARA Vb

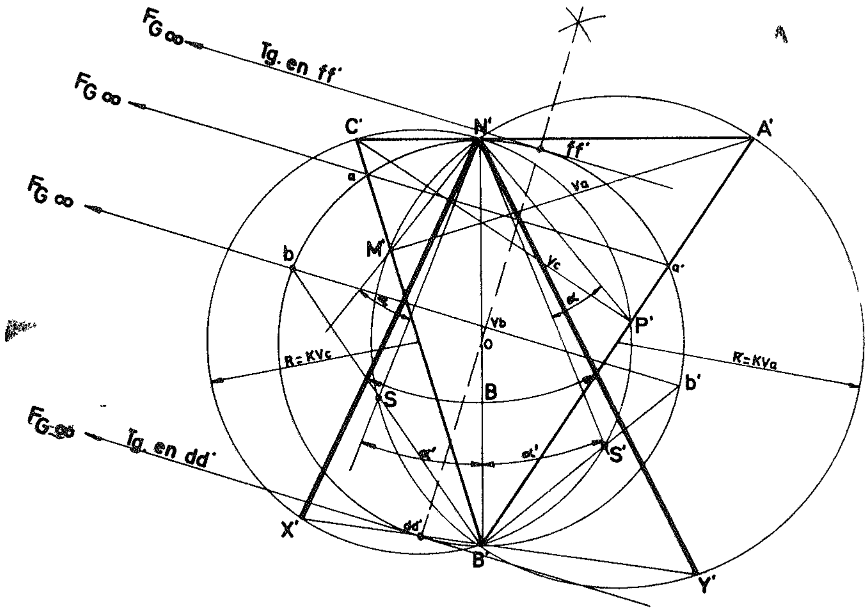

Fig. 4

evidentemente, con determinar el ángulo A. Por último, en el triángulo equilátero, por coincidir las bisectrices con las alturas y medianas, el problema resulta también elemental.

Nota: Dada la reiteración y secuencia de las construcciones geométricas que se precisan, es necesario cuidar mucho éstas, para obtener medidas precisas y nítidas en el triángulo solución ABC.