# OPERADORES DE DERIVACION Y DIFERENCIACION EN MODULOS

por

J. LEON ALVAREZ

En trabajos anteriores [1] y [2], introdujimos algebraicamente los conceptos de vector de un anillo y de derivación en un A-módulo, así como los duales, covector y diferencial. Nuestro propósito es hacer patente que éstos y aquéllos son Operadores Diferenciales, definidos sobre A-módulos, así como completar algunas de sus propiedades.

## OPERADORES DIFERENCIALES EN A-MÓDULOS

En este apartado aplicaremos la teoría de Operadores Diferenciales, Hermann [3], a nuestro problema. Sea A un anillo conmutativo con elemento unidad y M y M′ dos A-módulos.

*Definición.*

Llamaremos *operador diferencial de orden cero de M en M′* a todo homomorfismo $\Delta$ entre ambos A-módulos. El conjunto de estos operadores, que representaremos por $\Delta^o(M, M')$ es, a su vez, un A-módulo.

Para cada sucesión de elementos de A $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, definimos por inducción la aplicación aditiva $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, \Delta) : M \to M'$. Así, para $n = 1$ y $K \in M$ se define por

$$\varphi(a_1, \Delta)\, K = \Delta(a_1 K) - a_1 \,.\, \Delta K \tag{1}$$

Supuesto definido para $n - 1$. para $n$ será:

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, \Delta) = \varphi(a_1, \varphi(a_2, \ldots, a_n, \Delta)) \tag{2}$$

*Proposición* 1.

«Si $f$ es una aplicación aditiva $M \to M'$, será $f \in \Delta^o(M, M')$, si y sólo si $\varphi(a, f) = 0$.»

En efecto, sea $\forall\, a \in A$, $\varphi(a, f) = 0$, entonces $\varphi(a, f)\, K = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(a\, K) = a \,.\, f(K)$ y como $f$ es aditiva, $f \in \mathrm{Hom}\,(M, M')$. Recíprocamente, si $f \in \Delta^o(M, M') \Rightarrow f(a\, K) = a \,.\, f(K) \Rightarrow \varphi(a, f) = 0$.

c. q. d.

Generalizando lo anterior; sea $\Delta^n(M, M')$ el conjunto de todas las aplicaciones aditivas $\Delta : M \to M'$, tales que:

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, \Delta) = 0 \tag{3}$$

$\Delta^n(M, M')$ constituye el *A-módulo de operadores diferenciales de orden* n *de* M *en* M'.

*Consecuencia.*

$$"\Delta^0(M, M') \subset \Delta^1(M, M') \subset \ldots \subset \Delta^n(M, M')"$$

*Definición.*

La unión de todos los $\Delta^n(M, M')$ para todo entero $n \geqslant 0$, que denominaremos $\Delta(M, M')$, constituirá el *A-módulo de operadores diferenciales de* M *en* M'.

Si $\Delta \in \Delta^n(M, M')$, pero $\Delta \notin \Delta^{n-1}(M, M')$, será:

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, \Delta) = \varphi(a_1, \varphi(a_2, \ldots, a_{n+1}, \Delta)) = 0$$

luego

$$\varphi(a_2, \ldots, a_{n+1}, \Delta) \in \Delta^0(M, M')$$

es decir, una aplicación lineal de M en M'.

*Definición.*

Llamaremos *símbolo de* $\Delta$, $\varphi(\Delta)$, a la aplicación multilineal $\overbrace{A \times \ldots\ldots \times A}^{n)} \times M \longrightarrow M'$, definida para todo $K \in M$ por

$$\varphi(\Delta)(a_1, \ldots, a_n, K) = \varphi(a_1, \ldots, a_n, \Delta)\, K \tag{4}$$

*Definición.*

Denominamos *derivada de* A *en* M' a toda aplicación aditiva $\partial : A \to M'$ tal que

$$\forall\, a_1, a_2 \in A \quad ; \quad \partial(a_1 a_2) = \partial(a_1)\, a_2 + a_1\, \partial(a_2) \tag{5}$$

*Consecuencia.*

«La derivada $\partial$ de A en M', tal que: $\partial \in \Delta^0(A, M')$ es la derivada cero.»

Pues si $\partial \in \Delta^0(A, M') \iff \varphi(a, \partial)\, b = 0 \iff a \cdot \partial(b) + \partial(a) \cdot b - a \cdot \partial(b) = \partial(a) \cdot b = 0$, puesto que $b \neq 0$ y, $\forall\, a \in A$, $\partial(a) = 0$, $\partial$ será la aplicación $\partial : A \longrightarrow 0$. c. q. d.

*Proposición 2.*

«$\partial$, definida anteriormente, está en $\Delta^1(A, M')$.»

En efecto, si $b \in A$, $\varphi(a_2, \partial)\, b = \partial(a_2 b) - a_2\, \partial(b) = b\, \partial(a_2) + a_2\, \partial(b) - a_2\, \partial(b) = b\, \partial(a_2)$ : $\varphi(a_1, a_2, \partial)\, b = \varphi(a_1, \varphi(a_2, \partial))\, b = \varphi(a_2, \partial)(a_1 b) - a_1 \cdot \varphi(a_2, \partial)\, b = a_1 b\, \partial(a_2) - a_1 b\, \partial(a_2) = 0 \implies \partial \in \Delta^1(A, M')$ c.q.d.

Dado $\Delta \in \Delta^1(A, M')$, definiremos $\partial \in \Delta^1(A, M')$, por $\partial(a) = \Delta(a) - \Delta(1)\, a$ para todo $a \in A$.

*Lema.* «$\partial \in \Delta^1(A, M')$.»

Bastará con ver que $\varphi(a_1, a_2, \partial) = 0$. En efecto: $\varphi(a_1, a_2, \partial)\, b = \varphi(a_1, \varphi(a_2, \partial))\, b = \varphi(a_2, \partial)(a_1 b) - a_1 \varphi(a_2, \partial)\, b = \partial(a_2 a_1 b) - a_2 \partial(a_1 b) - a_1(\partial(a_2 b) - a_2 \partial(b)) = \partial(a_2 a_1 b) - a_2 \partial(a_1 b) - a_1 \partial(a_2 b) + a_1 a_2 \partial(b) = \Delta(a_2 a_1 b) - a_2 \Delta(a_1 b) - a_1 \Delta(a_2 b) + a_2 a_1 \Delta(b) - \Delta(1)(a_2 a_1 b - a_2 a_1 b - a_1 a_2 b + a_1 a_2 b) = \varphi(a_1, a_2, \Delta)\, b = 0$, por ser $\Delta \in \Delta^1(A, M')$.

*Proposición* 3.

«$\partial \in (A, M')$ es una derivada de A en M', esto es, cumple la relación (5).»

Observemos primero que $\partial(1) = \Delta(1) - \Delta(1) \cdot 1 = 0$. Como $\partial \in \Delta^1(A, M')$, $\varphi(a, \partial) \in \Delta^0(A, M')$, o sea es A-lineal. Luego, $\varphi(a, \partial)\, a' = \varphi(a, \partial)(1\, a') = a' \cdot \varphi(a, \partial)(1)$. Pero $\varphi(a, \partial)\, a' = \partial(aa') - a\, \partial(a') = \partial(aa') - aa'\, \partial(1) + aa'\, \partial(1) - a\, \partial(a') = \varphi(aa', \partial)(1) - a(\varphi(a', \partial)(1))$, de donde: $\varphi(aa', \partial)(1) = a\, \varphi(a', \partial)(1) + \varphi(a, \partial)\, a' = a\, \varphi(a', \partial)(1) + a'\, \varphi(a, \partial)(1) \Longrightarrow \partial(aa'\, 1) - aa'\, \partial(1) = a(\partial(a'\, 1) - a'\, \partial(1)) + a'(\partial(a \cdot 1) - a \cdot \partial(1)) \Longrightarrow \partial(aa') = a\, \partial(a') + a'\, \partial(a)$, por ser $\partial(1) = 0$.

Consecuencia inmediata, por ser $\Delta(a) = \partial(a) + \Delta(1) \cdot a$, es la siguiente

*Proposición* 4.

«$\Delta^1(A, M')$ es suma directa de $\Delta^0(A, M')$ y del módulo de derivadas de A en M'.»

## Vectores y derivaciones

En [1] definimos un *vector de A*, X, como toda aplicación aditiva $X : A \longrightarrow A$ con la propiedad

$$X(a \cdot b) = Xa \cdot b + a \cdot Xb \quad , \quad \forall\, a, b \in A \tag{6}$$

Es decir, se trata de una derivada de A en A. Según la Proposición 2, $V_A$, módulo de los vectores de A está contenido en $\Delta^1(A, A)$. Concretando, todo operador de primer orden de A en A será suma de un vector de A y de un operador de $\Delta^0(A, A)$ (Proposición 4). En otras palabras, vector de A será todo elemento de $\Delta^1(A, A)$ que, además, sea derivada de A en A. (Denotaremos los vectores indistintamente por mayúsculas o por minúsculas e, incluso, por símbolos como $\partial_i$).

En el caso particular en que $V_A$ sea el campo de vectores tangentes a una variedad, y A el anillo de funciones $C^\infty$ en la misma, se define una base canónica

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n} \right\}$$

de tal manera que

$$\forall\ X \in V_A \quad , \quad X(a) = b^i \frac{\partial}{\partial X_i}(a) = b^i\, \partial_i\,(a) \tag{7}$$

El símbolo del operador $X \in V_A$, en las anteriores circunstancias, se calcula así:

$$\varphi(a,\ X)\ a' = X(aa') - a\ X(a') = X(a)\ a' = b^i\ \partial_i\,(a)\ a'$$

por tanto,

$$\varphi(a,\ X) = b^i\ \partial_i\,(a) = X(a) \tag{8}$$

Denominábamos en [1] *derivación* a toda aplicación entre A-módulos, $D : V_A \longrightarrow D_M$, en que a cada vector de A, $x$, se hace corresponder una derivada $D_x$ en la dirección de dicho vector.

Sea D una derivación cualquiera entre módulos, $\varphi(a,\ D)\ x = D(ax) - a\ D(x) = Q^D(a,\ x)$ [1]. Puesto que $\varphi(a',\ Q^D)\ K = Q^D(a'\ K) - a'\ Q^D\ K = D_{ax}(a'\ K) - a\ D_x(a'\ K) - a'\ D_{ax}K + aa'\ D_x\ K = 0 \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow Q^D(a,\ x) \in \Delta^0(M,\ M)$.

Las derivaciones A-lineales, $\nabla$, se denominan *covariantes*, es decir, aquéllas que cumplen $\varphi(a,\ \nabla)\ X = \nabla(a\ X) - a\nabla\,(X) = 0 \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow \nabla \in \Delta^0\,(V_A,\ D_M)$.

*Proposición* 5.

«Las derivadas direccionales $D_x$, definidas en [2], pertenecen a $\Delta^1(M,\ M)$.»

En efecto, $\forall\ K \in M \quad , \quad \varphi(a_1,\ a_2,\ D_x)\ K = \varphi(a_1,\ \varphi(a_2,\ D_x)\,)\ K = \varphi(a_2,\ D_x)\ (a_1\ K) - a_1\ \varphi(a_2,\ D_x)\ K = D_x(a_2\,(a_1\ K)\,) - a_2\ D_x(a_1\ K) - a_1\ [D_x(a_2\ K) - a_2\ D_xK] = 0$. c. q. d.

El símbolo de $D_x$ será, $\varphi(a,\ D_x)\ K = D_x\,(a\ K) - a\ D_x\ K = x(a)\ K$, es decir, $\varphi(a,\ D_x) = x(a)$.

Consideremos algunas propiedades de las derivaciones aditivas.

*Proposición* 6.

«El conjunto $\Theta$ de las diferencias entre derivadas en la dirección de un mismo vector es un A-módulo.»

En efecto, se definen las operaciones:

$[(D_x - D'_x) + (D''_y - D'''_y)]\ K = (D_x - D'_x)\ K + (D''_y - D'''_y)\ K = [(D_x + D''_y) - (D'_x + D'''_y)]\ K \Longleftrightarrow [(D_x - D'_x) + (D''_y - D'''_y)] \in \Theta$, pues $(D_x + D''_y)$ y $(D'_x + D'''_y)$ son derivadas en la dirección $x + y$.

$[a\,(D_x - D'_x)]\ K = a\,.\,(D_x - D'_x)\ K = (a\ D_x - a\ D'_x)\ K \Longrightarrow a\ (D_x - D'_x) \in \Theta$, pues $a\ D_x$ y $a\ D'_x$ son derivadas en la dirección $ax$. c.q.d.

*Proposición* 7

«Sean D y D′ dos derivaciones aditivas, tales que si $\varphi(a\,.\,D)\,X = \varphi(a, D')\,X$, $\forall\, a \in A$ y $X \in V_A \Longrightarrow D - D' \in \Delta^o\,(V_A, \Theta)$.»

En efecto: $(D - D')\,(X + Y) = D(X + Y) - D'(X + Y) = (D - D')\,X + (D - D')\,Y$; $(D - D')\,(aX) = D(aX) - D'(aX) = a(D - D')\,X$, pues $D(aX) = \varphi(a, D)\,X + aD(X)$ y $D'(aX) = \varphi(a, D')\,X + aD'(X)$. c. q. d.

OPERADORES DUALES

Denominamos así a los operadores que constituyen módulos duales de los anteriores. Los *covectores* son los elementos del módulo dual $V^*_A$, es decir. el conjunto de aplicaciones lineales de $V_A$ en A. Como caso particular de estas aplicaciones, señalemos las definidas por $d$: $A \longrightarrow V^*_A$ mediante $da(X) = X(a)$, $\forall\, X \in V_A$.

*Proposición* 8.

«La aplicación $d$, antes definida, es una derivada de A en $V^*_A$.»

En efecto, es aditiva, puesto que:

$$d(a + b)\,X = X(a + b) = X(a) + X(b) = da(X) + db(X)$$

y

$$d(a\,.\,b)\,X = X(a\,.\,b) = X(a)\,.\,b + a\,.\,X(b) = da(X)\,.\,b + a\,.\,db(X)$$

c. q. d.

El símbolo del operador será:

$$\varphi(a, d)\,a' = d(aa') - a\,.\,da' = a'\,.\,da$$

luego

$$\varphi(a, d) = da \tag{9}$$

Los elementos del módulo dual $D^*_M$ se denominan *diferenciales*. Si M es módulo propio, veíamos en [1] que existía un homomorfismo $g : D_M \longrightarrow V_A$, es decir, $g \in \Delta^o(D_M, V_A)$.

*Proposición* 9

«$\forall\ \omega \in V^*_A$, se define un operador, $d_\omega \in \Delta^o(D_M, A)$, por medio de $d_\omega(D_x) = \omega(x) \in A$, $\forall\ D_x \in D_M$.»

En efecto, $\forall\ D_x,\ D_y \in D_M$, $d_\omega(D_x + D_y) = \omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y) = d_w(D_x) + d_\omega(D_y)$.

$\forall\, a \in A$. $d_\omega(a\,D_x) = \omega(ax) = a\,.\,\omega(x) = a\,.\,d_\omega(D_x)$. c. q. d.

Sean $L_x$ y $L_y$ dos derivadas generalizadas de Lie, es decir, derivadas que además son homomorfismos entre álgebras de Lie.

*Proposición* 10.

«La acción de $J_\omega$ sobre $[L_x, L_y]$ es igual al resultado d actuar el covector $\omega$ sobre la derivada canónica de Lie $[x, y]$.»

En efecto:

$$[L_x, L_y] = L_{[x,y]} \Rightarrow d_\omega([L_x, L_y]) = d_\omega(L_{[x,y]}) = \omega([x, y])$$

c. q. d.

BIBLIOGRAFIA


1. J. León Alvarez: «Derivaciones y conexiones en Módulos», tesis, Facultad de Ciencias, Universidad Complutense (Madrid), 1974.

2. J. León Alvarez: «Derivadas del álgebra de tensores», *Gaceta Matemática*, 26, págs. 135-142, 1974.

3. R. Hermann: *Geometry, Physics and Systems*, Marcel Dekker, 1973.


(18-3-1975)