FUNCIONES DERIVABLES EN CUATERNIONES

por

JUAN ARIAS DE REYNA MARTINEZ

En el presente trabajo probamos que las funciones definidas en una región del cuerpo de los cuaternios y con valores en el mismo cuerpo, derivables en toda la región son triviales.

Puede ser útil como ejercicio sobre la teoría de funciones de variable compleja, pero como no lo hemos encontrado propuesto, hemos decidido publicarlo.

No pretendemos que no exista teoría análoga en el caso de los cuaterniones, a la teoría de funciones analíticas; pero como puede comprobarse en el artículo de HAEFELI, la definición que dá la escuela de Fueter, de función analítica cuaternional, no es la de ser derivable.

Sea H el cuerpo de los cuaterniones. Lo consideramos identificado a $\mathbf{R}^4$, poniendo: $1 = (1,0,0,0)$; $i = (0,1,0,0)$; $j = (0,0,1,0)$; $k = (0,0,0,1)$.

Sea Ω una región de H, $f : \Omega \rightarrow$ H una función tal que para todo $a \in \Omega$ exista el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a + h) + f(a)\,)\, h^{-1} \qquad [1]$$

entonces f es de la forma $f(z) = a + bz$.

En efecto, si el límite existe y lo llamamos $f'(a)$, se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a + h) - f(a)\,)\, h^{-1} - f'(a) = 0$$

si $\| \;\|$ es la norma euclidiana de R^4, esto quiere decir que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 < \| h \| < \delta \Rightarrow \|(f(a + h) - f(a)\,)\, h^{-1} - f'(a)\| < \varepsilon$$

Como

$$\| ab \| = \| a \| \cdot \| b \|$$

esto da

$$0 < \| h \| < \delta \Rightarrow \| f(a + h) - f(a) - f'(a)\, h \| < \varepsilon \| h \|$$

como $h \to f'(a)\,h$ es una aplicación lineal, f será diferenciable en a y su diferencial es la aplicación que pasa de h a $f'(a)\,h$; luego la diferencial de f es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \qquad [2]$$

Esto quiere decir que si $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, las ecuaciones análogas a las de Cauchy-Riemann serían

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \; ; \quad -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3}$$

$$[3]$$

$$-\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_4}{\partial x_2} \; ; -\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_1}$$

Formemos las funciones complejas de Ω en ó

$$F_1 = f_1 + i\,f_2 \qquad F_2 = f_4 + i\,f_3$$

podemos considerarlas como funciones de las variables complejas

$$z_1 = x_1 + i\,x_2 \qquad z_2 = x_4 + i\,x_3$$

De las ecuaciones [3] se deduce que F_1 y F_2 son funciones analíticas de z_1 dejando z_2 fija y son analíticas en z_2 dejando z_1 fija. Por el teorema de Hartogs, F_1 y F_2 son funciones analíticas de las dos variables complejas z_1 y z_2 en la región $\Omega \subset C \times C$.

Pero, además,

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z_1} = \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial f_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_4} + i\,\frac{\partial f_2}{\partial x_4} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z_2} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} + i\,\frac{\partial f_3}{\partial x_4}$$

luego otra vez por [3]

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_1} = \overline{\frac{\partial F_2}{\partial z_2}} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z_2} = -\overline{\frac{\partial F_2}{\partial z_1}}$$

En un entorno de cada punto de Ω son entonces estas derivadas constantes, pues una función no puede ser analítica y antianalítica sin ser constante. Como Ω es una región, la diferencial de f es constante en Ω. Si $f'(a)$ es el cuaternión correspondiente, se tendrá $f(z) = f'(a)\,z + \text{cte}$.

BIBLIOGRAFIA

AHLFORS, L.: *Análisis de variable compleja*, Aguilar, Madrid, 1971.

HAEFELI, H.: *I funzionali lineari delle funzioni analitiche di una variabile quaternionale*, Rendiconti Accademia Nazionali dei Li (Rome) (4), 2, 1951, págs. 65-110.

(29-4-1975)