UN TEOREMA DE PUNTO FIJO

por

A. PEREZ GOMEZ

y

F. LOPEZ FERNANDEZ-ASENJO

En un trabajo debido a M. Edelstein (1) se demuestra el siguiente teorema: «Sea f una aplicación contractiva de un espacio completo X en sí mismo y se supone que existe un punto $x_1 \varepsilon$ X tal que la sucesión $\{f^n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente hacia el punto $x_0 \varepsilon$ X, entonces x_0 es el único punto fijo de f».

Se dice que una aplicación f de un espacio métrico X en sí mismo es contractiva si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo par de puntos x, $y \varepsilon$ X con $x \neq y$. Si se verifica que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y)$ siendo k constante con $0 < k < 1$ se dice que f es estrictamente contractiva.

Utilizando el teorema antes citado, se obtiene el siguiente resultado, que generaliza el teorema del punto fijo de Banach.

Teorema

Sea ψ una función real de variable real definida para $t \geqslant 0$. Se supone que ψ verifica las siguientes propiedades.

a) $\psi(0) = 0$ y $\psi(t) > 0$ si $t > 0$.
b) $\psi(t) < t$ si $t > 0$.
c) ψ es continua.

Si f es una aplicación de un espacio métrico completo X en sí mismo, verificando $d(f(x), f(y)) \leqslant \psi(d(x, y))$ para todo par de puntos x, $y \varepsilon$ X entonces f tiene un punto fijo y uno solo.

Demostración.

Sea $x_1 \varepsilon$ X y consideremos la sucesión $\{f^n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$, se verifica

$$d(f^{n+1}(x_1), f^n(x_1)\,) \leqslant \psi(d(f^n(x_1), f^{n-1}(x_1)\,) \leqslant d(f^n(x_1), f^{n-1}(x_1)\,) \qquad [2]$$

para $n = 2, 3, \ldots$ Por tanto, la sucesión $\{d(f^{n+1}(x_1), f^n(x_1))\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales es monótona decreciente, sea h su límite. Como ψ es continua

$$\lim_{n \to \infty} \psi(d(f^{n+1}(x_1), f^n(x_1))) = \psi(h)$$

y en virtud de la desigualdad [2] se deduce que $\psi(h) = h$, luego $h = 0$ por a). Existe entonces una subsucesión $\{f^{n_j}(x_1)\}_{j=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{f^n(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$d(f^{n_j+1}(x_1), f^{n_j}(x_1)) \leqslant \frac{1}{2^j} \quad j = 1, 2, \ldots$$

y por tanto, dicha subsucesión es de Cauchy. Como el espacio es completo, existe un punto $x_0 \in X$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} f^{n_j}(x_1) = x_0$$

Aplicando el resultado de M. Edelstein x_0 es el único punto fijo de f, ya que por b) f es una aplicación contractiva.

Obsérvese que este teorema generaliza el clásico teorema de Banach para aplicaciones contractivas de un espacio métrico completo en sí mismo, pues basta tomar $\psi(x) = k\,x$ con $0 < k < 1$.

A continuación damos un ejemplo sencillo, donde es aplicable el teorema anterior, y sin embargo, no lo es el teorema de Banach.

Ejemplo.

Si $X = \{x \in R / x \geqslant 1\}$ se tiene que X es subespacio completo de la recta real.

Sea ψ la aplicación de $R+$ en R definida por

$$\psi(t) = \frac{t}{1 + t}$$

y f la aplicación de X en X definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

La aplicación f es estrictamente monótona decreciente. Sea K un número real con $0 < K < 1$, veamos que no se verifica $d(f(x), f(y)) \leqslant K\, d(x, y)$ para todo par de puntos $x, y \in X$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ se puede suponer $x > y$ entonces $f(x) < f(y)$, luego

$$|f(x) - f(y)| = f(y) - f(x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x - y}{yx} \qquad [3]$$

Si

$$x_o = \frac{1}{\sqrt{K}} > 1 \text{ e } y_o$$

es un número real con

$$1 < y_o < \frac{1}{\sqrt{K}}$$

entonces

$$\frac{x_o - y_o}{y_o x_o} > K \mid x_o - y_o \mid = K(x_o - y_o)$$

ya que si se supone

$$\frac{x_o - y_o}{y_o x_o} \leqslant K(x_o - y_o)$$

se tendría que

$$1 \leqslant K\, x_o\, y_o < K \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \frac{1}{\sqrt{K}} = 1$$

y se llega a una contradicción.

Por otra parte, si x, $y \in X$ con $x > y$ se tiene que

$$x(y - 1) + (y - 1) \geqslant 0$$

y por tanto

$$\frac{1}{xy} \leqslant \frac{1}{1 + x - y}$$

de donde se deduce, finalmente por [3], que

$$\mid f(x) - f(y) \mid = \frac{x - y}{xy} \leqslant \frac{x - y}{1 + x - y} = \psi\,(\mid x - y \mid).$$

BIBLIOGRAFIA

M. Edelstein: «On fixed and periodic points under contractive mappings». J. London Math. Soc. (1).

Hille: «Methods in classical and Functional Analysis». Addison-Wesley.