RENE DEHEUVELS

SUCESION ESPECTRAL Y TRANSGRESION EN UN ESPACIO FIBRADO PRINCIPAL (*)

Notas recogidas y redactadas por

PEDRO MARTINEZ GADEA

Es bien sabido que uno de los campos de aplicación importantes de la Topología algebraica es la Geometría diferencial. Así, por ejemplo, la idea de la *sucesión espectral* de la Topología algebraica —debida a Leray [5] (**), el cual la introdujo en 1950— puede ser aplicada a un problema de Geometría diferencial. Veremos que existe una sucesión espectral en un espacio fibrado principal diferenciable —sobre una variedad diferenciable de clase C^{∞} de grupo estructural de Lie G, con una conexión.

§1. Bigraduación del Algebra de formas diferenciales exteriores sobre un espacio fibrado principal con una conexión.

Tenemos, pues, una variedad diferenciable V de Clase C^{∞}, y un e. f. p. (***) P sobre V, de grupo estructural G. G actúa, pues, a la derecha sobre P dando una aplicación diferenciable

$$\begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (y, \quad g) & \longrightarrow & yg \end{array}$$

tal que yg se mueve en la fibra a la que pertenece y. Además, para y fijo, g recorre G, dando un difeomorfismo del grupo G sobre la fibra dada.

(*) Conferencias en el Departamento de Geometría y Topología de Santiago de Compostela.

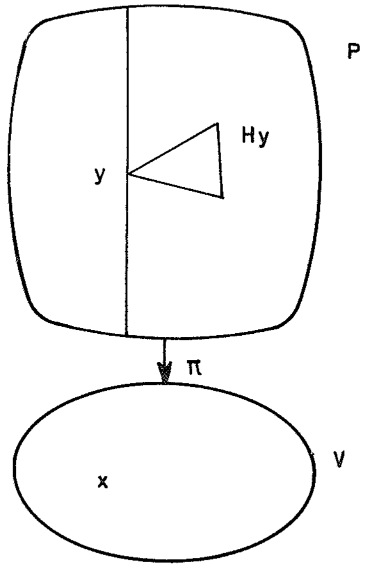
(**) Los números entre corchetes remiten a la bibliografía.

(***) En lo que sigue, suponemos las variedades diferenciables de clase C^{∞}, y denotaremos por e. f. p. las palabras espacio fibrado principal diferenciable.

Dado un e. f. p. P se define una *conexión* sobre P dando —es el modo más intuitivo de introducirla— una familia de subespacios H_y, llamados *horizontales*, del tangente TP, de modo que $H_y \subset (TP)_y$, de modo que si es $\pi : P \longrightarrow V$ la proyección del e. f. p., sea

$$\pi_* : (TP)_y \longrightarrow TV_x \quad , \quad x = \pi(y)$$

tal que π_* / H_y es un isomorfismo sobre TV_x. Además se exige que $H_{yg} = H_y \, g$ y que la aplicación $y \mapsto H_y$ sea diferenciable. Para más detalles, ver Quan [7].



Dada una conexión sobre P se consideran las formas diferenciales exteriores sobre P, y se define en ese álgebra una bigraduación. De ese modo, como veremos, una m-forma ω es de tipo (p, q), $p + q = m$, siendo p el 1.er grado y q el 2.º; puede así construirse una sucesión espectral, y obtener:

1. Las clases características del e. f. p.
2. La *transgresión* (detallando así una construcción de Chern de 1945).

Nota.—Podemos recordar situaciones análogas donde puede darse una bigraduación de las formas, así en el caso de las variedades complejas o casi complejas.

Dado un espacio vectorial E, descomponible en suma directa de dos subespacios,

$$E = E_1 \oplus E_2$$

la bien conocida expresión de la potencia exterior de E de grado m en función de las potencias exteriores de E_1 y E_2,

$$\wedge^m E = \bigoplus_{p+q=m} \{(\wedge^p E_1) \otimes (\wedge^q E_2)\}$$

puede abordarse, en el caso que estamos considerando, de modo más geométrico, así:

Una forma ω de grado m sobre P es una forma lineal sobre la potencia exterior $\wedge^m (TP)_y$, es decir,

$$\omega : \wedge^m (TP)_y \longrightarrow \mathbf{R}$$

Dado un elemento *descomponible* de $\wedge^m (TP)_y$, es de la forma

$$Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_m$$

Pero en $\wedge^m (TP)_y$ tenemos dos proyectores, el primero, h, sobre el subespacio *horizontal*, y el 2.º, v, sobre el vertical (tangente a la fibra de P), y es $h + v = 1$, es decir,

$$Y = h\,Y + v\,Y$$

Podemos escribir

$$Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m = (h\,Y_1 + v\,Y_1) \wedge \ldots \wedge (h\,Y_m + v\,Y_m) =$$

$$= \Sigma\, k_1 Y_1 \wedge k_2 Y_2 \wedge \ldots \wedge k_m Y_m \quad , \quad k_i = \begin{cases} h \\ v \end{cases} \tag{1.1}$$

que es una suma con 2^m términos.

Se considera el subespacio

$$T_y^{(o,\, m)} \subset \wedge^m (TP)_y$$

definido como el generado por las combinaciones lineales del tipo

$$\Sigma\, v\,Y_1 \wedge \ldots \wedge v\,Y_m$$

y el subespacio

$$T_y^{(1,\, m-1)}$$

generado por las combinaciones lineales del tipo (1.1), donde los k_i son: 1 igual a h, y $m - 1$ iguales a v. Así, se tiene

$$\wedge^m (TP)_y = T_y^{(o,\, m)} \oplus T_y^{(1,\, m-1)} \oplus \ldots \oplus T_y^{(m,\, o)}$$

Si es $\pi_{(p,\, q)}$ el proyector de $\wedge^m (TP)_y$ sobre

$$T_y^{(p,\, q)}$$

dada una m-forma ω, si ponemos

$$\omega_{p,\,q} = \omega.\pi(p,\,q)$$

Es

$$\omega = \sum_{p+q=m} \omega_{p,\,q}$$

Nota.—En geometría diferencial hay formas que son *de tipo puro* (de bigrado precisado). Así, dada una conexión sobre P, define (y, recíprocamente, puede ser definida la conexión mediante ella) una *forma* ω *de conexión* de grado 1, suma, por tanto, de $\omega_{1,0}$ y $\omega_{0,\,1}$. Ya que el subespacio vertical V_y es isomorfo al álgebra de Lie del grupo G, es decir, $V_y \approx L(G)$, puede considerarse que ω es una aplicación

$$\omega : TP \longrightarrow L(G)$$

pues ω se anula sobre el subespacio horizontal H_y. ω *es, pues, pura de tipo* (0, 1). Además, se define la *curvatura* Ω *de la conexión* así:

$$\Omega = d\omega \cdot (h,\, h) = (d\omega)_{(2,0)}$$

o sea, la *componente pura de tipo* (2, 0) *de* $d\omega$.

§2. Descomposición de la diferencial exterior.

Veamos ahora qué ocurre con la diferencial exterior. Dada una forma pura $\omega_{p,\,q}$. ¿Qué ocurre con su diferencial? Sabemos que si (en general) grado $\omega = m$, es

$$\begin{aligned} d\omega\,(X_0, X_1, \ldots, X_m) = (-1)^i\, X_i \cdot \omega\,(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_m) \;+ \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, \omega\,([X_i,\, X_j],\, X_p,\, \ldots,\, \hat{X}_i,\, \ldots,\, \hat{X}_j, \ldots\, X_m) \end{aligned} \tag{2.1}$$

¿cuál es el tipo de $d\omega$? Es decir, ¿cuál es el valor de

$$d\omega\,(k_0\, X_0,\, k_1\, X_1,\, \ldots,\, k_m\, X_m)$$

con $k_i = h$ ó v? Vemos que en (2.1) hay vectores a la izquierda, y campos (sino, no podría considerarse el corchete) a la derecha. Por ello, teniendo en cuenta que se ha embebido cada vector en un campo, y la parte derecha no depende de como se embebe el vector en el campo, se busca el campo más sencillo correspondiente a un vector dado, del modo que sigue: Si el vector es horizontal, se embebe en el campo obtenido, considerando que, localmente. el e. f. p. es producto; luego basta tomar cualquier campo horizontal que sea invariante por las traslaciones por los elementos del grupo.

Para los verticales se considera que a un vector en V_y le corresponde uno único $A \in L(G)$. A partir de $P \times G \longrightarrow P$ se define la aplicación

$$TP \times TG \longrightarrow TP$$

$$(O_y, A_e) \;\vee\!\longrightarrow A^*_y$$

es decir, se obtiene el campo A^* al variar y correspondiendo A^* al vector A.

Así, el corchete de un campo de vectores horizontales y otro vertical así obtenido es cero, $[H, V] = 0$.

Si los dos campos son verticales, el corchete es el del álgebra de Lie.

Si los dos son horizontales, el corchete tiene dos componentes: una horizontal y una vertical (la curvatura).

Por tanto, si ω es de tipo (p, q), $d\omega$ tiene tres componentes:

$d_F\ \omega$, de tipo $(p, q + 1)$, llamada *diferencial a lo largo de las fibras.*

$d_B\ \omega$, de tipo $(p + 1, q)$, llamada *diferencial a lo largo de la base.*

$d_C\ \omega$, de tipo $(p + 2, q - 1)$, llamada *diferencial cruzada* (expresa la curvatura).

En Topología algebraica, con el álgebra de cocadenas, no aparece la última diferencial, característica de la geometría diferencial, con la curvatura de las conexiones.

Sea A el álgebra de formas diferenciales exteriores. Los 2 grados dependen esencialmente de la conexión. Sin embargo, igual que cuando en Topología algebraica se encuentra un anillo o álgebra con 2 grados definidos por un especio fibrado, siguiendo la idea de Leray se define una *filtración*, obteniéndose una estructura más débil que la de los 2 grados, sea aquí:

Dada $\omega \in A_p$, se define una filtración de ω a lo menos p, $f(\omega) \geqslant p$. si

$$\omega = \omega_{p,q} + \omega_{p+1,q-1} + \ldots = \sum_{i \geqslant p} \omega_{i,j}$$

con $\omega_{i,j}$ puras. Entonces se tiene

$$A = A^0 \supset A^1 \supset A^2 \supset A^3 \supset \ldots$$

Se dice que A esta *filtrada*, y se prueba que esa filtración no depende de la conexión. Tenemos, en general, otros grados, pero con la construcción de la Topología algebraica, se construye la sucesión espectral de esa filtración, que solo depende del e. f. p., no de la conexión.

Nota.—De esa sucesión espectral puede deducirse inmediatamente el teorema de A. Weil sobre la independencia de las clases características del fibrado (no dependen de la conexión).

Sabemos que $d^2 = 0$, y hemos visto antes la descomposición de d en d_F, d_B y d_C. Combinando ambos resultados se obtiene fácilmente (escribiendo sólo los bigrados),

$$\begin{tikzcd}
 & & (p, q+2) \\
 & (p, q+1) \arrow[ur, "d_F"] \arrow[r, "d_B"] \arrow[dr, "d_C"] & (p+1, q+1) \\
(p, q) \arrow[ur, "d_F"] \arrow[r, "d_\varepsilon"] \arrow[dr, "d_C"] & (p+1, q) \arrow[ur, "d_F"] \arrow[r, "d_B"] \arrow[dr, "d_C"] & (p+2, q) \\
 & (p+2, q-1) \arrow[ur, "d_F"] \arrow[r, "d_B"] \arrow[dr, "d_C"] & (p+3, q-1) \\
 & & (p+4, q-2)
\end{tikzcd}$$

y, por lo anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&d^2_F = 0 \\
&d_B\, d_F + d_C\, d_B = 0 \\
&d^2_B + d_C\, d_F + d_F\, d_C = 0 \\
&d_C\, d_B + d_B\, d_C = 0 \\
&d^2_C = 0
\end{aligned}$$

Si queremos ver, además, qué ocurre con las formas de conexión y de curvatura, tenemos, escribiendo debajo el bigrado:

$$\text{i)}\quad \underset{(0,1)}{\omega}\ ,\ d\omega = \underset{(2,0)}{\Omega} - \underset{(0,2)}{\frac{1}{2}\,\omega \wedge \omega} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned} &d_F\,\omega = \omega \wedge \omega \\ &d_B\,\omega = 0 \\ &d_C\,\omega = \Omega \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)}\quad d\Omega &= d(d_C\,\omega) = (d_F + d_B)\, d_C\,\omega = \\
&= (d_F\, d_C - d_C\, d_B)\,\omega = d_F\, d_C\,\omega = d_F\,\Omega
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{tikzcd}
 & (2,1) \\
(2,0) \arrow[ur, "d_F"] \arrow[r, "d_B"] \arrow[dr, "d_C"] & (3,0) \\
 & (4,-1)\ \text{(cero)}
\end{tikzcd}$$

pero luego de

$$d\Omega = d_F\,\Omega = \omega \wedge \Omega$$

es

$$d_B \, \Omega = 0$$

lo cual es equivalente al teorema de Bianchi,

$$D\Omega = 0$$

§3. La transgresión.

Dado el e. f. p. P(V, G), sea G un grupo de Lie *compacto*. Se sabe que la cohomología real de G, siendo G general puede calcularse mediante las formas diferenciales exteriores sobre G. siendo —por el teorema de De Rham— esa cohomología la del álgebra de formas exteriores. Pero en el caso de ser G compacto, hasta hallar las formas *biinvariantes* sobre G, pues si α es una de tales formas, es $d\alpha = 0$, y en cada clase de formas diferenciales exteriores cohomólogas existe una única forma biinvariante. Se toma el dual del álgebra de Lie, $(L(G))^*$, y se considera el álgebra exterior sobre $(L(G))^*$,

$$\wedge L^* = \wedge (L(G))^*$$

sobre la cual opera el grupo G por la transformación adjunta, es decir, dada $\omega \in \wedge L^*$ es

$$ad(g) \; \omega = g \, \omega \, g^{-1} , \; g \in G$$

Pues bien, las formas biinvariantes son las formas invariantes a la izquierda y por la transformación adjunta. Sea $G = 0(h)$, entonces $L(G) =$ $=$ matrices antisimétricas. Dada α, biinvariante de grado m, se le hace corresponder una forma diferencial exterior γ_0 sobre P, así (todo en un punto y)

$$\gamma_0 (X_1, \ldots, X_m) = \alpha ((v X_1)^*, \ldots, (v X_m)^*) , \; X_i \in (TP)_y \qquad (v X_i)^* \in L(G)$$

Esa forma γ_0 es pura de tipo $(0, m)$ y es

$$\begin{tikzcd} & (0, m+1) \\ \underset{(0,m)}{d\gamma_0} \arrow[ur, "d_F"] \arrow[r, "d_B"] \arrow[dr, "d_C"'] & (1, m) \\ & (2, m-1) \end{tikzcd}$$

$d_F \, \gamma_0 = 0$, pues $d\alpha = 0$. Puede verse también que $d_B \, \gamma_0 = 0$, lo cual es lógico —aunque no inmediato de probar—, pues indica cómo varía γ_0 al hacer una traslación horizontal, y cómo no varía en esas condiciones, es $d_B \, \gamma_0 = 0$. Queda $d_C \, \gamma_0$, que es biinvariante sobre el grupo de Lie, y se prueba que puede por tanto expresarse como

$$d_C \, \gamma_0 = d_F \, \gamma_1$$

siendo γ_1 una forma pura de bigrado $(2, m - 2)$ tal que

$$d_B \gamma_1 = 0$$

¿Qué ocurre con $d_C \gamma_1$? A su vez, existe γ_2 de bigrado $(4, m - 4)$, tal que $d_C \gamma_1 = d_F \gamma_2$. Así, sucesivamente, se obtiene

$$\begin{array}{lcl} d_C \gamma_0 = d_F \gamma_1 & , & d_B \gamma_0 = 0 \\ d_C \gamma_1 = d_F \gamma_2 & , & d_B \gamma_1 = 0 \\ \cdots & & \cdots \\ d_C \gamma_{k-1} = 0 & . & d_B \gamma_{k-1} = 0 \end{array}$$

y,

Para ello, ha de ser $m = 2k$, y es $d_C \gamma_{k-1}$ de bigrado $(2k, 0)$.

Sea

$$C = (-1)^{k-1} \gamma_{k-1} + \ldots - \gamma_1 + \gamma_0$$

Es

$$d\, C = (-1)^{k-1} d_C \gamma_{k-1}$$

como fácilmente se prueba

Se puede hacer de modo invariante. γ_0 es invariante, pues α es biinvariante. $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ son invariantes por las operaciones del grupo G y se acaba el proceso en una forma horizontal invariante. Ese proceso conocido en Topología algebraica, es la *transgresión*. Cada vez que hacemos, pues, $d_F(\ )$. es lo mismo que $\omega \wedge (\ )$ y $d_C(\ )$ es lo mismo que pasar las ω a Ω.

Cada cociclo característico del e. f. p. $(-1)^{k-1} d_C \gamma_{k-1}$ se obtiene a partir de un cociclo biinvariante. Eso lo hizo Chern [1], [2] en un caso particular al estudiar el problema de Gauss-Bonnet. Tenía que considerar el caso $G = SO(2n)$, pues tenía una variedad Rienmanniana orientable, es decir, que admitía una reducción el grupo del tangente a $SO(2n)$, y hay una forma biinvariante que sólo existe en el caso de dimensión par, el *cociclo de Euler*, el cual es descrito por Chern, y a partir de él hace construcciones no del todo claras. obteniendo el cociclo característico correspondiente (*forma de Euler* sobre la variedad) y obtiene la fórmula

$$dC = (-1)^{k-1} d_C \gamma_{k-1}$$

No se conocía entonces (1944-45) la transgresión ni la sucesión espectral. La idea, muy buena, es simplemente bajar un cociclo del grupo de Lie a un cociclo de la base, bajando los grados como hemos hecho en el caso general.

Nota.—Esas construcciones pueden hacerse análogamente en el caso complejo.

Hemos desarrollado el siguiente proceso: Dada una forma biinvariante, es decir, una forma multilineal alternada sobre L(G), que es invariante por la transformación *ad*, se define a partir de ella una forma γ_0 sobre P, de modo que

$$\gamma_0 (X_1, \ldots, X_m) = \alpha ((X_1)^*, \ldots (v\, X_m)^*)$$

§4. EJEMPLOS.

A) *Primer ejemplo.*

El ejemplo más sencillo es con $G = U(n)$ (con $G = 0(n)$ es más complicado). Entonces es $L(G)$ el conjunto de matrices antihermíticas y la transformación adjunta, dada una matriz $U \in U(n)$ es

$$(ad\, U)\, A = U\, A\, U^{-1} \quad , \quad A \in L(G)$$

Como por definición de $U(n)$, ${}^t\bar{U} = U^{-1}$, esa transformación deja invariante $L(G)$ y el corchete es el conmutador de las matrices. Queremos hallar la forma lineal biinvariante más sencilla sobre $L(G)$ (invariante por *ad*). Se prueba fácilmente que la *única* con esas condiciones es la traza, es decir

$$\alpha(A) = Tr\, A$$

(salvo un coeficiente). Para ello se diagonaliza la matriz, resultando, por ser antihermítica, elementos imaginarios puros. Se toma, además, la normalizada, real

$$\alpha(A) = \frac{1}{2\,\pi\, i}\, Tr\, A$$

Dado un e. f. p. de grupo estructural $U(n)$ se toma

$$\gamma_0(X) = \alpha(v\, X) = \frac{1}{2\,\pi\, i}\, Tr\, \omega(X)$$

siendo ω la 1-forma de la conexión sobre el e. f. p. con valores en $L(G)$, es decir, que

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\,\pi\, i}\, Tr\, \omega$$

que es una forma sobre el e. f. p., definida a partir de α, y que es pura de bigrado $(0, m)$. Es decir. se intenta bajar el grado *sobre la fibra* y aumentar el grado *sobre 'a base*, de modo que a partir de un cociclo (de una clase de cohomología) del grupo, se obtiene un cociclo (clase de cohomología) de la base. A esa operación se le llama la *transgresión*.

Ya que $\gamma_0 = (1/2\,\pi\, i)\; Tr\, \omega$, es $d_F\, \gamma_0 = 0$, pues α es biinvariante sobre G, y es, por tanto, $d\alpha = 0$. Es más difícil de probar que $d_B\, \gamma_0 = 0$, pero intuitivamente se ve que ha de ocurrir. Queda sólo $d_C\, \gamma_0$, de bigrado $(2, m - 1)$. Se sigue el proceso anterior, obteniendo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}$, $C = (-1)^{k-1}\, \gamma_{-1} + \ldots$

Es

$$c\,|_F = \gamma_0\,|_F = \alpha$$

(F es la fibra) las demás dan cero, y

$$dC = (-1)^{k-1}\, d_C\, \gamma_{k-1} \quad \text{de bigrado } (2k, 0)$$

En nuestro caso sólo hay $k = 1$, y es

$$d_G \gamma_0 = \frac{1}{2 \pi i} \operatorname{Tr} d_G \omega = \frac{1}{2 \pi i} \operatorname{Tr} \Omega$$

que es la *primera forma de Chern*, la cual da la primera clase de Chern del tipo e. f. p. con grupo $U(n)$, o del espacio fibrado vectorial complejo asociado.

B) *Segundo ejemplo.*

La dimensión siguiente para α es 3. Dado un grupo de Lie G, de álgebra de Lie L(G), se define una forma canónica bilineal simétrica sobre L(G), b, tal que

$$b(X, Y) = \operatorname{Tr} (ad\, X \cdot ad\, Y) \qquad X, Y \in L(G)$$

adX es un endomorfismo del álgebra de Lie L(G); es $adX \cdot Z = [X, Z]$. adY es un endomorfismo, pero actúa el grupo sobre el álgebra.
Se toma ahora la forma α, tal que

$$\alpha(X, Y, Z) = b\,([X, Y], Z)$$

y se prueba fácilmente que:

1) α es trilineal antisimétrica.
2) α es invariante por *ad* (si G es conexo), luego considerada como forma diferencial sobre G es biinvariante, de donde $d\alpha = 0$.
3) Si G es semisimple (e incluso en el caso $G = U(n)$) es $\alpha \neq 0$. (Teorema conocido ya por E. Cartan: Si un grupo de Lie compacto es simple, la cohomología de grado 3 no es cero, pues existe una clase de $H^3(G)$ definida por esa forma.)

Ahora es $2k - 1 = 3$, o sea $k = 2$. Tenemos, pues, γ_0 y γ_1 y dando una conexión en el fibrado puede verse lo que ocurre.

C) *Tercer ejemplo.*

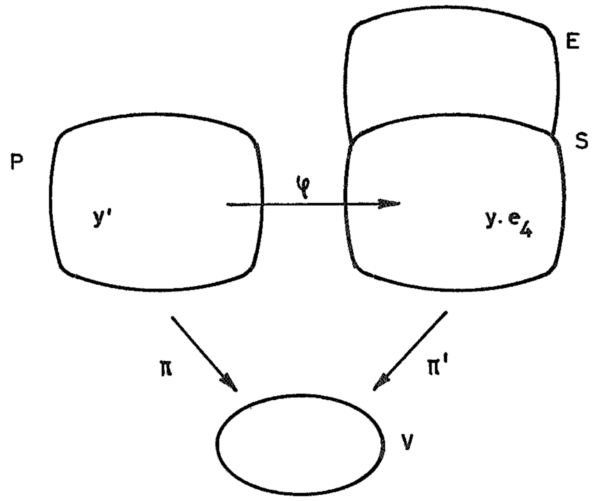
El trabajo de Chern [1] sobre el teorema de Gauss-Bonnet, se entiende mejor con estos fundamentos. Antes era algo oscuro.

Sea P un e. f. p. de grupo $SO(n)$. Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ la base natural de $\mathbb{R}^n$, y sea e_n el último elemento de la base. Si $g \in SO(n)$, es $g \cdot e_n \in S^{n-1}$.

Se considera que P es el e. f. p. de referencias de un espacio fibrado vectorial real E de rango n, con métrica euclidiana y orientado. Es decir, si $y \in P$ —como la fibra tipo de F es $\mathbb{R}^n$—, es y un isomorfismo

$$y : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_x$$

que conserva la métrica, y P_x es el conjunto de esos isomorfismos sobre x.



Dado e_n, sus imágenes $y \cdot e_n$ definen en E un subfibrado S (por esferas unitarias). Además, se obtiene así una aplicación fibrada φ, tal que la imagen recíproca de $y \cdot e_n$ es una clase módulo $\mathrm{SO}(n - 1)$. Si son

$$\pi : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{V} \quad \text{y} \quad \pi' : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{V}$$

las proyecciones. el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{S} \arrow[dl, "\pi'"] \\ & \mathrm{V} & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Eso da una aplicación natural

$$\psi : \mathrm{G} = \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \mathrm{S}^{n-1}$$
$$g \longmapsto g \cdot e_n$$

Consideramos una forma diferencial exterior de grado $n - 1$ sobre la esfera S^{n-1}, de *volumen*, v (es decir, dado el espacio tangente en un punto a S^{n-1} con la estructura euclidiana inducida de la del espacio ambiente y dadas coordenadas $x^1, \ldots x^{n-1}$. es

$$v = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$$

v es una forma invariante por las transformaciones del grupo de rotaciones,. es decir, que $\psi^* v$ define una forma diferencial exterior sobre

SO(n) invariante, la cual se elige como α, y a partir de ella se define γ_0, de grado $n - 1$ sobre P (dotado de una conexión).

Dada la forma de conexión —con valores en el álgebra de Lie de SO(n), es decir, en el álgebra de matrices reales antisimétricas—, es del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 & & \omega^1_n \\ \omega^2_1 & 0 & & \\ & & & \\ & & & \omega^{n-1}_n \\ \omega^n_0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

donde cada componente es una forma ordinaria con valores reales y puede probarse que

$$\gamma_0 = \omega^1_n \wedge \omega^2_n \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}_n$$

la cual se puede normalizar usando una forma de volumen, tal que de vol $S^{n-1} = 1$, y es así:

$$\gamma_0 = \frac{1}{\text{coefic.}} \, \omega^1_n \wedge \omega^2_n \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}_n$$

Ha de ser $n = 2k$. Si no es par, no llegamos a una forma que nos dé un cociclo básico. Para más detalles (con otro enfoque) ver Chern [1], [2].

Es $d_C \, \gamma_{n-1}$ la *forma de Euler* (o de *Gauss-Bonnet)* y es

$$d_C \, \gamma_{k-1} = \text{coefic. } Pf(\Omega)$$

donde $Pf(\Omega)$ es el Pfaffiano (ver Greub *et al.* [4]), lo cual define la clase de Euler. Chern prueba el teorema de Gauss-Bonnet, así: Sea $\varepsilon = a \, Pf(\Omega)$ (de grado $2k$) la clase de Euler. En el e. f. p. P es $\varepsilon = dC$, donde C está L construido con $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$. En P es ε un cociclo, y usando Stokes, y $\varepsilon = dc$, se llega a probar el teorema.

§5. La transgresión y la sucesión espectral,

La transgresión es el concepto más importante en el estudio de la cohomología de un *e. f. p.* En general —en Topología algebraica— se describe de tres modos equivalentes:

1.º Dado un espacio fibrado (E, π, B, F) (donde E, B, F son espacios topológicos) se considera una teoría de cohomología, con cocadenas, por ejemplo, la cohomología singular. Se define entonces una *cocadena* c *de transgresión relativa a* x ε B, como una cocadena tal que

i) $c/_{F_x}$ es un cociclo.

ii) $d_C = \pi^* a$, donde a es una cocadena de la base.

Así, el cociclo c pertenece a una clase $h \in H^m(F)$; es a un cociclo que define una clase $h' \in H^{m+1}(B)$. Entonces la cocadena de transgresión hace corresponder a una clase de cohomología de la fibra, una de la base. Como, en general, no hay elemento a, y aun habiéndola no hay unicidad, la transgresión debe definirse como una aplicación

$$\begin{array}{ccc} \tau : & T & \longrightarrow H^*(B)/_M \\ & \cap & \\ & H^*(F) & \end{array}$$

del subconjunto de $H^*(F)$ de cocadenas *transgresivas* $T = \{c / \exists\, a.\ d_C = \pi^* a\}$ en un cociente de la cohomología de la base.

2.º *Debido a Serre* [8].

Se considera la cohomología relativa $H^*(E; F_x)$. Sabemos que entre la aplicación natural *coborde*, δ y dado

$$H^*(F_x) \xrightarrow{\delta} H^*(E; F_x) \xleftarrow{\pi^*} H^*(B)$$

si se da una clase en $H^*(F_x)$, puede ocurrir que su imagen, mediante δ, no corresponda a ningún elemento imagen de uno mediante π^*. Hemos, pues, de tomar intersecciones de imágenes; y como además no es inyectiva, se han de tomar cocientes.

3.º *Con la sucesión espectral del fibrado.*

Es la más útil. Veámoslo con nuestra filtración

$$A = A^0 \supset A^1 \supset A^2 \supset A^3 \supset \ldots$$

donde A es el álgebra de *f. d. e.* sobre el *e. f. p.* P y la diferencial es la diferencial exterior. Sabemos que para obtener la sucesión espectral de Leray [5] asociada se consideran los

$$E_r^p = C^p / \left(C_r^{p-1} + B_{r-1}^p \right)$$

donde

$$C_r^p = \{ a \in A^p / da \in A^{p+r} \}$$

$$B_r^p = d\, C_{r-1}^{p-r+1}$$

y ocurre que la restricción de esa diferencial define una diferencial d_r sobre el cociente

$$E_r^p$$

de modo que la cohomología de

$$E_r = \bigotimes_p E_r^p$$

es

$$H^*(E_r) = E_{r+1}$$

y, además, no es hasta el infinito, pues la filtración es limitada. El especial interés de la sucesión espectral es que si A es el álgebra de cocadenas de un fibrado, con una filtración adecuada es

$$E_2 = H^* (B; H^*(F))$$

es decir,

$$E_2^{p,q} = H^p (B; H^q(F))$$

y

$$E_\infty \text{ es «casi» } H^*(\epsilon)$$

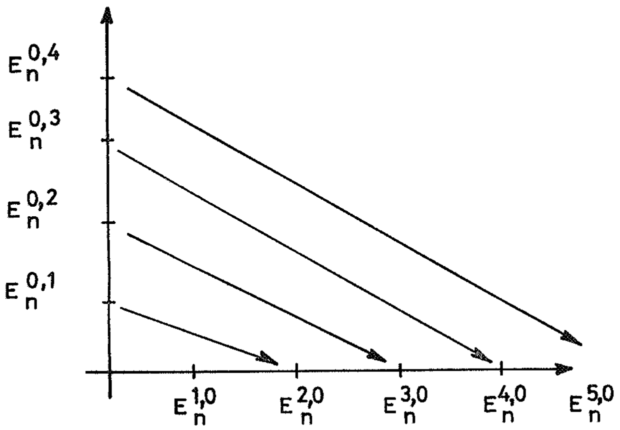
En nuestro caso, como hay una aplicación fibrada se aplica la sucesión espectral del fibrado (P, π, v) en la del fibrado por esferas (S, π', v). En los fibrados por esferas la sucesión esp. degenera en la de Gysin, y la imagen de la clase de Gysin-Thom es la clase de Euler.

$$\begin{tikzcd}
SO(n) \arrow[r] & P \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S \arrow[dl, "\pi'"] \\
& & V &
\end{tikzcd}$$

En cuanto a la transgresión, se prueba que se tiene, siendo B simplemente con eso,

$$\begin{tikzcd}
E_2^{o,m}, = H^0 (B; H^m(F)) = H^m(F) \supset E_3^{o,m} \supset E_4^{o,m} \supset \ldots \supset E_n^{o,m} \arrow[d, "d_m"] \\
H^{m+1}(B) \arrow[r] & E_n^{m+1,0}
\end{tikzcd}$$

y es d_m la *transgresión*, la cual puede representarse, como es habitual, mediante el esquema siguiente:



BIBLIOGRAFIA

1. CHERN, S. S.: *A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet theorem for closed Riemannian manifolds.* Ann. of Math. 45 (1944), 747-750.
2. CHERN, S. S.: *On the curvature integral in a Riemannian manifold*. Ann. of Math. 46(1945), 674-684.
3. DEHEUVELS, R.: *Curso en la Universidad de Paris,* Primavera 1974.
4. GREUB, W.; HALPERIN, S. y VANSTONE, R.: *Connections, curvature and cohomology; I y II.* Academic Press (1973).
5. LERAY, J.: *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue.* J. Math. Pur. Appli. 29(1950), 1-139.
6. LERAY, J.: *L'homologie d'un espace fibré dont le fibre est connexe,* J. Math. Pur. Appl. 29(1950), 169-213.
7. QUAN, P. M.: *Introduction à la geometrie des variétés différentiables.* Dunod, París (1969).
8. SERRE. J. P.: *Homologie singulière des espaces fibrés.* Ann. Math., 54(1951), 425-505.