APLICACIONES EXHAUSTIVAS, DIFERENCIAS FINITAS Y UNA FORMULA DE INTERES EN FISICA

por

JULIO GARCIA PRADILLO

En los números 1-2, 3-4 y 5-6 de *GACETA MATEMATICA* del año 1974, los señores Pérez de Vargas y Quirós; Pérez de Vargas, Quirós y Recio; Erice y Simo, respectivamente, se ocupan de la expresión

$$\sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k \quad \text{con} \quad n, k \in \mathrm{N}^*$$

dando diversas demostraciones de que es igual a cero si $k < n$ y distinta de cero si $k \geqslant n$.

Queremos hacer observar al respecto que en el número 1-2 de *GACETA MATEMATICA* del año 1967, en mi artículo «Aplicaciones exhaustivas, variaciones con repetición, y diferencias finitas o pequeña historia de un problema olímpico», se demuestra

$$\forall\, m, n \in \mathrm{N}^* \quad \mathrm{E}_{n,m} = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n = \Delta^m (0^n)$$

en donde $\mathrm{E}_{n,m}$ designaba el número de aplicaciones exhaustivas de un conjunto de n elementos en otro de m.

Pero dado que

$$\forall\ n,\ k \in \mathrm{N}^* \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k = (-1)^n \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k =$$

$$= (-1)^n\ \mathrm{E}_{k,n} = (-1)^n\ \Delta^k\ (0^n)$$

es inmediato, tanto por la consideración de las aplicaciones exhaustivas, como por la de las diferencias finitas, deducir que

$$\forall\ n,\ k \in \mathrm{N}^* \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k \text{ es } \begin{Bmatrix} \text{igual a} \\ \text{distinto de} \end{Bmatrix} \text{ cero si } \begin{Bmatrix} k < n \\ k \geqslant n \end{Bmatrix}$$

(30-XI-74)