CONSTRUCCION DEL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES A PARTIR DE LAS SUCESIONES DECIMALES (TAMBIEN LLAMADOS DESARROLLOS DECIMALES)

por

JUAN LUIS SANCHEZ GONZALEZ

INTRODUCCIÓN

El esquema de este trabajo es el siguiente: a partir del anillo de los números decimales y de la topología ordinaria en este conjunto se definen las sucesiones decimales como un tipo muy particular de sucesiones de Cauchy de números decimales. Se demuestra la existencia de una aplicación que llamamos de decimalización que transforma sucesiones de Cauchy (de números decimales) en sucesiones decimales. Finalmente se prueba que el conjunto de las sucesiones decimales es cuerpo y es, por definición, el cuerpo de los números reales. Se identifica así el número real con la sucesión decimal unívocamente determinada por él.

Sea $\mathbf{Z}$ el anillo de los números enteros. Sea $S = \{10^n \mid n \geqslant 0, n \in \mathbf{Z}\}$, que es subconjunto multiplicativamente cerrado de $\mathbf{Z}$. El anillo de fracciones $S^{-1}\mathbf{Z}$ es, por definición, el anillo de los números decimales, que designaremos por $\mathbf{D}$.

Definición 1. Sea $x \in \mathbf{D}$, diremos que x es positivo si

$$x = \frac{p}{10^n}$$

siendo p un entero posittivo.

Es claro que esta definición no depende del representante elegido.

Definición 2. Si $x, y \in \mathbf{D}$, $x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x$ es positivo ó $x = y$. Es trivial que $\leqslant$ es una relación de orden total en $\mathbf{D}$. Escribiremos $x < y$ cuando $x \leqslant y$ y $x \neq y$.

Sea

$$\mathbf{B} = \{B_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$$

tal que

$$B_n = \left\{ x \in \mathbf{D} \;\middle|\; -\frac{1}{10^n} < x < \frac{1}{10^n} \right\}$$

Así, $\mathbf{B}$ es un sistema fundamental de entornos del 0: U es entorno del cero si $U \supset B_n$ para algún n entero. V es entorno de x si $V = U + x$, donde U es entorno del cero.

Así, $\mathbf{D}$ es un espacio topológico. Llamaremos $\mathbf{D}+$ los decimales positivos.

Definición 3. Una sucesión de números decimales (no confundir con sucesión decimal, que se definirá luego) es una aplicación de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{D}$.

Escribiremos a_n en lugar de $a(n)$ para cada $n \in \mathbf{N}$.

Escribiremos $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, o simplemente (a_n), para designar la sucesión a.

Llamaremos $\mathbf{A}$ al conjunto de todas las sucesiones de números decimales, que es un anillo conmutativo con elemento unidad, con las operaciones usuales:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

Un utensilio importante en este trabajo es el uso de la función «parte entera de», que se define de la manera siguiente:

Definición 4. Consideremos:

$$[\ ] : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{Z}$$

Si $x \in \mathbf{D}$, se define:

$$[x] = \max_{a \in \mathbf{Z}} \{a \mid a \leqslant x\}$$

Una relación muy amplia de las propiedades de esta aplicación puede verse en *An Introduction to the theory of Numbers*, de Niven & Buckermann, pág. 78.

Aquí sólo enunciaremos las que vamos a utilizar:

4.1. $\forall\, x \in \mathbf{D}$ es $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

4.2. $\forall\, x, y \in \mathbf{D}$ es $[x] + [y] \leqslant [x + y] \leqslant [x] + [y] + 1$.

4.3. $\forall\, x \in \mathbf{D}, \forall\, m \in \mathbf{Z}+$ es $\left[\dfrac{x}{m}\right] = \left[\dfrac{[x]}{m}\right]$.

4.4. $\forall\, x, y \in \mathbf{D}+$ es $[x - y] \leqslant [x] - [y] \leqslant [x - y] + 1$.

4.5. $\forall\, x, y \in \mathbf{D}+$ es $[x] \cdot [y] \leqslant [x \cdot y]$.

que damos sin demostración.

Definición 5. Una *sucesión decimal positiva* (s. d. p.) es una sucesión (a_n) de números decimales. que satisface los siguientes axiomas:

5.1. $a_n\, 10^n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ y $\exists\, m$, tal que $a_m \neq 0$.

5.2. $[a_{n+1}\, 10^n] = a_n\, 10^n$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

5.3. No existe $p \in \mathbf{N}$, tal que $a_{p+s}\, 10^{p+s} = a_p\, 10^{p+s} + 10^s - 1$, $\forall\, s \geqslant 1$.

Una *sucesión decimal negativa* es la opuesta de una sucesión decimal positiva.

La *sucesión cero* es, por definición, una sucesión decimal. Las condiciones 5.1 y 5.2 son de fácil interpretación. Con la 5.3. expresamos la imposibilidad de que una sucesión decimal sea tal, qué a partir de un lugar en adelante, sean todos nueves, y su necesidad está justificada por la unicidad que queremos encontrar de la aplicación d, que luego definiremos.

Proposición 6. Si (a_n) es s. d. p., se verifica que:

$$[a_m\, 10^n] = a_n\, 10^n\ ,\ \forall\, m \geqslant n$$

En efecto: Sea $m = n + r$, $r \geqslant 0$. Lo demostraremos por inducción sobre r. Para $r = 0$ es cierto por 5.1 y para $r = 1$ también por 5.2. Supongamos que es cierto para $r - 1$, es decir:

$$[a_{n+r-1}\, 10^n] = a_n\, 10^n$$

Entonces:

$$[a_{n+r}\, 10^r] \overset{4.3}{=} \left[\frac{[a_{n+r}\, 10^{n+r-1}]}{10^{r-1}}\right] \overset{5.2}{=} \left[\frac{a_{n+r-1}\cdot 10^{n+r-1}}{10^{r-1}}\right] =$$

$$= [a_{n+r-1}\, 10^n] = a_n\, 10^n \;\#$$

Definición 7. Una sucesión $(a_n) \in \mathbf{A}$ se dice de Cauchy si $\forall\, n \in \mathbf{Z}$, $\exists\, m_n \in \mathbf{N}$, tal que $a_p - a_q \in \mathrm{B}_n$, $\forall\, p,\, q \geqslant m_n$.

Proposición 8. Toda sucesión decimal es de Cauchy. En efecto: $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\exists\, m_n = \max\{0, n\}$ tal que si $p \geqslant q \geqslant m_n$ es: $(a_p - a_q)\, 10^q = a_p\, 10^q - a_q\, 10^q = [a_p\, 10^q] + a'_p - a_q\, 10^q$, donde $a'_p \in \mathrm{B}_0$ y por la prop. 6

$$= a_q\, 10^q + a'_p - a_q\, 10^q = a'_p \in \mathrm{B}_0 \Longrightarrow a_p - a_q \in \frac{1}{10^q}\, \mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_q \subseteq \mathrm{B}_n \;\#$$

Proposición 9. El conjunto de todas las sucesiones de Cauchy $\mathbf{A}_c$ es un subanillo del anillo $\mathbf{A}$.

a) Sean (a_n), $(b_n) \in \mathbf{A}_c$.

Dado $n + 1$,

$$\exists\, m_{n+1} \text{ tal que } a_p - a_q \in \mathrm{B}_{n+1},\ \forall\, p.\, q \geqslant m_{n+1}$$
$$\exists\, m'_{n+1} \text{ tal que } b_p - b_q \in \mathrm{B}_{n+1},\ \forall\, p,\, q \geqslant m'_{n+1}$$

luego, $\forall\ n \in \mathbf{Z}$, $\exists\ m''_n = \max\{m_{n+1}, m'_{n+1}\}$, tal que:

$$(a_p - b_p) - (a_q - b_q) = (a_p - a_q) + (b_q - b_p) \in B_{n+1} + \\ + B_{n+1} \subset B_n,\ \forall\ p, q \geqslant m''_n$$

b) Sean r y s tales que $a_n \in B_r$ y $b_n \in B_s$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$. La existencia de r y s está asegurada, pues toda suc. de Cauchy está acotada.

Dado $n - s + 1$, $\exists\ m_{n-s+1}$, tal que $a_p - a_q \in B_{n-s+1}$, $\forall\ p, q \geqslant m_{n-s+1}$.

Dado $n - r + 1$, $\exists\ m'_{n-r+1}$, tal que $b_p - b_q \in B_{n-r+1}$, $\forall\ p, q \geqslant m_{n-r+1}$.

Luego: $\forall\ n \in \mathbf{Z}$, $\exists\ m''_n = \max\{m_{n-s+1}, m'_{n-r+1}\}$, tal que $a_p\, b_p - a_q\, b_q = a_p\,(b_p - b_q) - b_q\,(a_p - a_q) \in B_r \cdot B_{n-r+1} + B_s \cdot B_{n-s+1} \subset B_n$. $\forall\ p\ , q \geqslant m''_n$.

Es trivial que la sucesión unidad es de Cauchy. #

Definición 10. Una sucesión $(a_n) \in \mathbf{A}$ diremos que es *nula* si $\forall n \in \mathbf{Z}$, $\exists\ m_n \in \mathbf{N}$, tal que $a_p \in B_n$. para todo $p \geqslant m_n$.

Proposición 11. El conjunto $\mathbf{M}_0$ de todas las sucesiones nulas es un ideal del anillo $\mathbf{A}_c$.

La demostración es análoga a la de la prop. 9, por lo que la omitimos #.

Definición 12. Una sucesión $(a_n) \in \mathbf{A}$ se dice que tiene límite $a \in \mathbf{D}$, o que converge hacia a, y se escribe

$$\lim\,(a_n) = a$$

si $(a_n) - (a) \in \mathbf{M}_0$, entendiendo por (a) la sucesión constante que aplica cada $n \in \mathbf{N}$ en $a \in \mathbf{D}$.

Proposición 13. El conjunto $\mathbf{A}_L$ de todas las sucesiones que poseen límite es un subanillo de $\mathbf{A}_c$ y además

$$\lim : \mathbf{A}_L \longrightarrow \mathbf{D}$$

es homomorfismo sobre de anillos.

En efecto:

a) $\lim\,(a_n) = a \iff \left.\begin{matrix}(a_n) - (a) \in \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{A}_c \\ (a) \in \mathbf{A}_c\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}((a_n) - (a)) + \\ + (a) = (a_n) \in \mathbf{A}_c\end{matrix}$

b) $\left.\begin{matrix}\lim\,(a_n) = a \\ \lim\,(b_n) = b\end{matrix}\right\} \iff \left.\begin{matrix}(a_n) - (a) \in \mathbf{M}_0 \\ (b_n) - (b) \in \mathbf{M}_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a_n + b_n) - (a + b) \in \mathbf{M}_0$

c) $(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b) = a_n\ (b_n - b) + b\ (a_n - a) \in \mathbf{M}_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\,(a_n \cdot b_n) = ab.$

d) Trivialmente, lim es sobre #.

Proposición 14. La correspondencia $j : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{A}_D$ definida por

$$j(x) = (x_n)$$

donde

$$x_n = \frac{[x\ 10^n]}{10^n}, \forall\ n \in \mathbf{N},$$

es una aplicación inyectiva. $\mathbf{A}_D$ es el conjunto de todas las sucesiones decimales (def. 5). #

Proposición 15. La aplicación $d : \mathbf{A}_L \longrightarrow \mathbf{A}_D$ definida por

$$d = j \cdot \lim$$

verifica que:

$$(a_n) - d\ (a_n) \in \mathbf{M}_0 \ \#$$

Nuestro propósito es encontrar una extensión de d, que llamaremos con el mismo nombre, que se aplique a todos los elementos de $\mathbf{A}_c$ y satisfaga $(a_n) - d\ (a_n) \in \mathbf{M}_0$.

Teorema 16 (fundamental).

Para cada sucesión $(a_n) \in \mathbf{A}_c$, existe una única sucesión $d(a_n) \in \mathbf{A}_D$, tal que $(a_n) - d(a_n) \in \mathbf{M}_0$.

La demostración de este teorema la haremos a través de 4 lemas.

Lema 17.

Sea $(a_n) \in \mathbf{A}_c$, monótona, no decreciente, y de términos todos positivos. Entonces:

$$\forall\ n \in \mathbf{N}, \exists\ \mu_n \in \mathbf{N}$$

tal que

$$[a_p\ 10^n] = [a_p\ 10^n], \forall\ p, q \geqslant \mu_n$$

En efecto: Dado $n \in \mathbf{Z}$, $\exists\ m_n \in \mathbf{N}$, tal que

$$0 \leqslant a_p - a_{m_n} < \frac{1}{10^n}, \forall\ p > m_n$$

Entonces:

$$a_p\ 10^n = a_{m_n}\ 10^n + \varepsilon_p$$

donde

$$0 \leqslant \varepsilon_p < 1\ , \forall\ p \geqslant m_n$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow\ [a_p\ 10^n] = [a_{m_n}\ 10^n + \varepsilon_p] \leqslant [a_{m_n}\ 10^n] + 1\ , \forall\ p \geqslant m_n \\ \qquad \text{por otra parte } a_{m_n} \leqslant a_p \Longrightarrow [a_{m_n}\ 10^n] \leqslant [a_p\ 10]^n \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ [a_{m_n}\ 10^n] \leqslant [a_p\ 10^n] \leqslant [a_{m_n}\ 10^n] + 1, \forall\ p \geqslant m_n$$

y si llamamos

$$M_n = \{p \in \mathbf{N} \mid [a_p\, 10^n] = [a_{m_n}\, 10^n]\}$$

$$M'_n = \{p \in \mathbf{N} \mid [a_p\, 10^n] = [a_{m_n}\, 10^n] + 1\}$$

es claro que $\forall\, p \geqslant m_n$ se tiene $p \in M_n \cup M'_n$.

a) Si $M'_n = \emptyset$, se define $\mu_n = \min M_n$, que, evidentemente, existe y se verifica que:

$$\forall\, p\,,\, q \geqslant \mu_n \text{ es } [a_p\, 10^n] = [a_q\, 10^n].$$

b) Si $M'_n \neq \emptyset$ se define $\mu_n = \min M'_n$ y se verifica:

$$\forall\, p,\, q \geqslant \mu_n \text{ es } [a_p\, 10^n] = [a_q\, 10^n] = [a_{\mu_n}\, 10^n] = [a_{m_n}\, 10^n] + 1$$

Nota: Obsérvese que de la definición de μ se deduce:

$$p \geqslant q \Longleftrightarrow \mu_p \geqslant \mu_q$$

Lema 18.

Sea $(a_n) \in \mathbf{A}_c$, monótona, no creciente, y de términos todos positivos. Entonces:

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\, \exists\, \mu_n \in \mathbf{N}$$

tal que

$$[a_p\, 10^n] = [a_q\, 10^n]\,,\ \forall\, p,\, q \geqslant \mu_n$$

La demostración es análoga al lema 17, pero ahora:

$$M'_n = \{p \in \mathbf{N} \mid [a_p\, 10^n] = [a_{m_n}\, 10^n] - 1\}$$

y además

$$a_{m_n}\, 10^n = a_p\, 10^n + \varepsilon_p$$

donde

$$0 \leqslant \varepsilon_p < 1.\ \#$$

Lema 19.

Sea $(a_n) \in \mathbf{A}_C - \mathbf{A}_L$. Existe una subsucesión de (a_n) que es monótona y de términos todos positivos o todos negativos.

Nota: El resultado sigue siendo válido si $(a_n) \in \mathbf{A}_L$, pero en este caso ya conocemos la definición de $d(a_n)$.

Demostración.

Llamamos

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \{p \in \mathbf{N} \mid a_n \leqslant a_p\} \\ A'_n &= \{p \in \mathbf{N} \mid a_p \leqslant a_n\} \end{aligned}\right\}\ \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Es trivial que $\forall\, n \in \mathbf{N}$ es $A_n \cup A'_n = \mathbf{N}$, luego A_n o A'_n son infinitos. Sean:

$$M_o = \{n \in \mathbf{N} \mid A_n \text{ es infinito}\}$$

$$M'_o = \{n \in \mathbf{N} \mid A'_n \text{ es infinito}\}$$

M_o o M'_o son infinitos, pues si ambos fuesen finitos, $\exists\, m \in \mathbf{N}$ tal que $m \notin M_o \cup M'_o$ y serían A_m y A'_m finitos: contradicción. Supongamos que M_o es infinito; en caso contrario sería M'_o infinito y se procedería de manera análoga.

Llamamos $\alpha_o = \min M_o$ que existe evidentemente; sea

$$M^*_o = \{n \in M_o \mid a_n < a_{\alpha_o}\}$$

que supondremos, por el momento, que es finito; sea

$$M_1 = M_o - M^*_o$$

y repitiendo el proceso obtenemos una sucesión de conjuntos disjuntos

$$M^*_o,\ M^*_1,\ \ldots,\ M^*_p,\ \ldots$$

definidos por:

$$M^*_p = \}n \in M_p \mid a_n < a_{\alpha_p}\}$$

y que supondremos todos finitos, y otra sucesión de conjuntos

$$M_o \supset M_1 \supset \ldots\ldots \supset M_p \supset \ldots\ldots$$

definidos recurrentemente por:

$$M_p = M_{p-1} - M^*_{p-1}$$

y donde:

$$\alpha_p = \min M_p - \{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}\}\ ,\ \forall\, p \geqslant 1$$
$$\alpha_o = \min M_o$$

Con estas consideraciones se tiene, evidentemente, que:

$$a_{\alpha_o} \leqslant a_{\alpha_1} \leqslant \ldots\ldots \leqslant a_{\alpha_p} \leqslant \ldots\ldots$$

es una subsucesión monótona no decreciente de (a_n)..

Esta subsucesión, o tiene infinitos términos negativos, y entonces es de términos todos negativos, o tiene infinitos términos positivos, y entonces tiene, a lo más, un número finito de términos negativos. Prescindiendo de ellos se tiene una subsucesión de (a_n), de términos todos positivos, que llamaremos en lo sucesivo (a'_n).

Supongamos ahora que existe al menos un M^*_s, que es infinito, y admitamos que s es mínimo verificando tal condición, es decir:

$$M^*_o, \ldots, M^*_{s-1} \text{ son finitos; } M^*_s \text{ es infinito.}$$

Entonces

$$\exists\, \alpha_s = \min M_s - \{\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}\}$$

Recordemos que $M^*_s = \{n \in M_s \mid a_n < a_{\alpha_s}\}$, es decir, existen infinitos términos de la sucesión menores estrictamente que a_{α_s} y como $\alpha_s \in M_s \subset M_o$, hay también infinitos términos mayores o iguales que a_{α_s}. Probaremos que, en este caso (a_n) posee límite a_{α_s}, con lo que quedará concluida la prueba del lema 19.

Teniendo en cuenta estos resultados, se tiene:

$$\forall\, n \in \mathbf{Z},\ \exists\, m_n \in \mathbf{N}$$

tal que

$$a_p - a_q \in B_n\ ,\ \forall\, p, q \geqslant m_n$$

y además

$$\exists\, p_1, p_2 \geqslant m_n$$

tales que

$$\begin{cases} a_{p_1} < a_{\alpha_s} \leqslant a_{p_2} \\ a_{p_1} - a_{p_2} \in B_n \end{cases}$$

Entonces: $\forall\, l \geqslant m_n$ se verifica

$$\begin{cases} a_{p_1} - a_l \in B_n \\ a_{p_2} - a_l \in B_n \end{cases}$$

y por tanto:

$$a_{p_2} - \frac{1}{10^n} < a_l < a_{p_1} + \frac{1}{10^n}\ ,\ \forall\, l \geqslant m_n$$

Finalmente:

$$a_{\alpha_s} - \frac{1}{10^n} \leqslant a_{p_2} - \frac{1}{10^n} < a_l < a_{p_1} + \frac{1}{10^n} < a_{\alpha_s} + \frac{1}{10^n}$$

es decir: $\forall\, l \geqslant m_n$ es $a_l - a_{\alpha_s} \in B_n$, luego $\lim\,(a_n) = a_{\alpha_s}$. #

Los lemas precedentes (17, 18 y 19) nos permiten dar una definición de $d(a_n)$, para cada $(a_n) \in \mathbf{A}_C$.

Si $(a_n) \in \mathbf{A}_L$ se define $d(a_n) = (j \cdot \lim)\,(a_n)$ que, según vimos, es sucesión decimal y satisface $(a_n) - d(a_n) \in \mathbf{M}_0$.

Supongamos, pues, que $(a_n) \in \mathbf{A}_C - \mathbf{A}_L$.

Por el lema 19 existe una subsucesión (a'_n), monótona; si es de términos todos positivos, por el lema 17 ó 18, existe μ_n. Entonces definimos:

$$d_n = d(a_n) = d(a'_n) = \frac{[a'_{\mu_n}\, 10^n]}{10^n}\ ,\ \forall\, n \in \mathbf{N} \qquad [1]$$

si se verifica 5.3 (5.1 y 5.2 se cumplen trivialmente). Si no se verifica 5.3, esto es, si

$\exists\ p \in \mathbf{N}$, p mínimo tal que: $d_{p+s}\ 10^{p+s} = d_p\ 10^{p+s} + 10^s - 1$, $\forall\ s \geqslant 1$

entonces se define:

$$d'_n = d_n\ ,\ \forall\ n \leqslant p - 1,\ \text{y}\ d'_n = d_n + \frac{1}{10^n}\ .\ \forall\ n \geqslant p \qquad [2]$$

que verifica trivialmente 5.1 y 5.3. Veamos que también verifica 5.2. En efecto:

a) Si $n + 1 \leqslant p - 1$ se tiene:

$$[d'_{n+1}\ 10^n] = [d_{n+1}\ 10^n] = \left[\frac{[a'_{\mu_{n+1}}\ 10^{n+1}]}{10^{n+1}}\ 10^n\right] =$$

$$= \left[\frac{[a'_{\mu_{n+1}}\ 10^{n+1}]}{10}\right] = \left[\frac{a'_{\mu_{n+1}}\ 10^{n+1}}{10}\right] =$$

$$= [a'_{\mu_{n+1}}\ 10^n] = [a'_{\mu_n}\ 10^n] = d_n\ 10^n = d'_n\ 10^n$$

b) Si $n + 1 > p$ se tiene:

$$[d'_{n+1}\ 10^n] = \left[\frac{d'_{n+1}\ 10^{n+1}}{10}\right] = \left[\frac{d_{n+1}\ 10^{n+1} + 1}{10}\right] =$$

$$= \left[\frac{d_p\ 10^{n+1} + 10^{n+1-p}}{10}\right] = [d_p\ 10^n + 10^{n-p}] =$$

$$= [d_n\ 10^n + 1] = [d'_n\ 10^n] = d'_n\ 10^n$$

c) Si $n + 1 = p$

$$[d'_p\ 10^{p-1}] = \left[d_p\ 10^{p-1} + \frac{1}{10}\right] = [d_p\ 10^{p-1}] = d_{p-1}\ 10^{p-1}$$

$$\left(\left[d_p\ 10^{p-1} + \frac{1}{10}\right] = [d_p\ 10^{p-1}] + 1 \text{ contradice que } p \text{ sea mínimo}\right)$$

Si fuese (a'_n) de términos negativos se definiría:

$$d(a'_n) = -\ d(-a'_n)$$

Por otra parte se tiene:

$$(a_n) - (a'_n) \in \mathbf{M}_0 \quad \text{y} \quad (a'_n) - d(a'_n) \in \mathbf{M}_0$$

luego

$$(a_n) - d(a_n) \in \mathbf{M}_0.$$

En efecto:

$$\forall\ n \in \mathbf{Z},\ \exists\ m_n = \max\{\mu_n,\ n\}$$

tal que $\forall\, p \geqslant m_n$ es:

$$a'_p\,10^n - d(a'_p)\,10^n = a'_p\,10^n - [a'_{\mu_p}\,10^n] = a'_p\,10^n - [a'_{\mu_n}\,10^n] =$$
$$= a'_p\,10^n - [a'_p\,10^n] < 1 \iff a'_p - d(a'_p) \in B_n,$$
$$\forall\, p \geqslant m_n.$$

Lo mismo si d está definida por [2].

Falta, para concluir la demostración del teorema, probar la unicidad. Para ello probaremos el

Lema 20. Si $(a_n) \in \mathbf{A}_C$ es no nula, tiene infinitos términos positivos y si (d_n) y (d'_n) son dos sucesiones decimales, tales que:

$$(a_n) - (d_n) \in \mathbf{M}_0 \quad \text{y} \quad (a_n) - (d'_n) \in \mathbf{M}_0$$

entonces

$$(d_n) = (d'_n).$$

En efecto: Se tiene que $(d_n) - (d'_n) \in \mathbf{M}_0$. Supongamos que $(d_n) \neq$ $\neq (d'_n)$. Entonces existe $r \in \mathbf{N}$ mínimo, tal que $d_r \neq d'_r$. Supongamos que $d_r > d'_r$. Entonces:

$$d_r\,10^r > d'_r\,10^r$$

y por tanto:

$$d_r\,10^r \geqslant d'_r\,10^r + 1$$

Si fuese

$$d_r\,10^r > d'_r\,10^r + 1$$

sería

$$d_r\,10^r - d'_r\,10^r > 1$$

y entonces

$$\forall\, s \geqslant 0$$

sería

$$[d_{r+s}\,10^r - d'_{r+s}\,10^r] + 1 \geqslant [d_{r+s}\,10^r] - [d'_{r+s}\,10^s] = d_r\,10^r - d'_r\,10^r > 1$$

de donde

$$(d_{r+s} - d'_{r+s})\,10^r \geqslant [(d_{r+s} - d'_{r+s})\,10^r] \geqslant 1, \forall\, s \geqslant 0$$

y finalmente

$$d_{r+s} - d'_{r+s} \geqslant \frac{1}{10^r}$$

contradicción con $(d_n) - (d'_n) \in \mathbf{M}_0$. Luego

$$\boxed{d_r\,10^r = d'_r\,10^r + 1}$$

Por otra parte, $\forall\, s \geqslant 0$, se tiene

$$d'_{r+s}\, 10^{r+s} = (d'_{r+s}\, 10^r)\, 10^s < ([d'_{r+s}\, 10^r] + 1)\, 10^s = d'_r\, 10^{r+s} + 10^s = d_r\, 10^{r+s} \leqslant d_{r+s}\, 10^{r+s}$$

Si $\exists\, s \geqslant 0$, tal que $d_{r+s}\, 10^{r+s} > d'_{r+s}\, 10^{r+s} + 1$, se llega, como antes, a contradicción. luego

$$\boxed{d_{r+s}\, 10^{r+s} = d'_{r+s}\, 10^{r+s} + 1, \forall\, s \geqslant 0}$$

Por ser (d_n) s. d. p. es $d_{r+s} \geqslant d_r$, $\forall\, s \geqslant 0$.

Si fuese $d_{r+s} > d_r$ sería $d_{r+s}\, 10^{r+s} \geqslant d_r\, 10^{r+s} + 1$, $\forall\, s > 0$, y entonces

$$d'_{r+s}\, 10^{r+s} = (d'_{r+s}\, 10^r)\, 10^s < ([d'_{r+s}\, 10^r] + 1)\, 10^s = d'_r\, 10^{r+s} + 10^s, \forall\, s > 0$$

$d'_{r+s}\, 10^{r+s} = d_{r+s}\, 10^{r+s} - 1 \geqslant d_r\, 10^{r+s} = d'^r\, 10^{r+s} + 10^s$. Contradicción.

Luego

$$\boxed{d_r = d_{r+s}, \forall\, s \geqslant 0}$$

Finalmente:

$$d'_{r+s}\, 10^{r+s} = d_{r+s}\, 10^{r+s} - 1 = d_r\, 10^{r+s} - 1 = d'_r\, 10^{r+s} + 10^s - 1. \ \forall\, s > 0.$$

es decir (d'_n) no verifica 5.3 y, por tanto, no es sucesión decimal contra la hipótesis. Luego (d_n) es única y queda probado el teorema. #

Proposición 21. Si (a_n). (b_n) son sucesiones de Cauchy, se verifica

$$(a_n) - (b_n) \in \mathbf{M}_0$$

si y sólo si

$$d(a_n) = d(b_n)$$

En efecto

$\Rightarrow$ De $(a_n) - d(a_n) \in \mathbf{M}_0$, $(b_n) - d(b_n) \in \mathbf{M}_0$ y $(a_n) - (b_n) \in \mathbf{M}_0$ se deduce que $d(a_n) - d(b_n) \in \mathbf{M}_0$, y según el lema 20, resulta: $d(a_n) = d(b_n)$.

$\Leftarrow$ trivial. #

Proposición 22. El conjunto $\mathbf{A}_D$ con las operaciones

$$(a_n) + (b_n) = d\,(a_n + b_n)$$
$$(a_n) \cdot (b_n) = d\,(a_n \cdot b_n)$$

es un anillo conmutativo con elemento unidad.

Probaremos las asociativas y la distributiva. Las demás son inmediatas.

a) $d\,(d(a_n + b_n) + c_n) = d(a_n + d(b_n + c_n))$, $\forall\, (a_n), (b_n), (c_n) \in \mathbf{A}_D$
$d\,(a_n + b_n) - (a_n + b_n) + (c_n + b_n) - d\,(b_n + c_n) =$
$= d\,(a_n + b_n) + c_n - a_n - d\,(b_n + c_n) \in \mathbf{M}_0$ y por la prop. 21 resulta la prop. asociativa de la suma.

b) Basta considerar que:
$d(a_n b_n) \cdot c_n - a_n b_n c_n + a_n b_n c_n - a_n d(b_n c_n) =$
$= d(a_n b_n) \cdot c_n - a_n d(b_n c_n) \in \mathbf{M}_o$ y por la prop. 21 resulta la prop. asociativa del producto.

c) $a_n d(b_n + c_n) - a_n(b_n + c_n) + a_n b_n + a_n c_n - d(a_n b_n) -$
$- d(a_n c_n) = a_n d(b_n + e_n) - d(a_n b_n) - d(a_n c_n) \in \mathbf{M}_o$, luego por la proposición 21 resulta la distributividad. #

Proposición 23. La aplicación $d : \mathbf{A}_C \longrightarrow \mathbf{A}_D$ es homomorfismo de anillos.

Es consecuencia inmediata de la prop. 21 y de ser:

$$(a_n) + (b_n) - d(a_n) - d(b_n) \in \mathbf{M}_o$$

$$(a_n) \cdot (b_n) - d(a_n)\, d(b_n) = (a_n)(b_n - d(b_n)) + d(b_n)(a_n - d(a_n)) \in \mathbf{M}_o$$

Es trivial que $d(1)$ es la suc. decimal unidad. #

La prop. 21 nos asegura que Ker $d = \mathbf{M}_o$, y como d es sobre resulta que

$$\mathbf{A}_C / \mathrm{Ker}\, d \cong \mathbf{A}_D$$

Definición 24. Un número real es una sucesión decimal. Los números reales tienen, pues, estructura de anillo conmutativo con unidad; pero es más, veamos que, además, forman un cuerpo.

Teorema 25. Si $(a_n) \in \mathbf{A}_D$ y es positiva, existe otra $(b_n) \in \mathbf{A}_D$ tal que $(a_n)(b_n) = 1$, sucesión decimal unidad.

Demostración.

Usaremos el algoritmo de la división en $\mathbf{Z}$.

Como (a_n) es s. d. p., $\exists\, r$ mínimo, tal que $a_r \neq 0$.

Definimos:

$$c_n = 0 \;,\; \forall\, n = 0, 1, \ldots, r - 1$$

$$c_n = \frac{1}{10^n}\left[\frac{10^{2n}}{a_n\, 10^n}\right], \forall\, n \geqslant r$$

a) $(c_n) \in \mathbf{A}_C$. En efecto, sea $\epsilon_{p,q} = c_p - c_q$ y $\epsilon_{q,p} = c_q - c_q$.
Sea $l = \min\{p, q\}$ y $l' = \max\{p, q\}$. Usaremos los dos siguientes hechos, de fácil comprobación:

$$a_p - a_q \in \mathrm{B}_l \qquad [1]$$

$$\exists\, s \in \mathbf{N} \text{ y } \exists\, t \in \mathbf{N} \text{ tal que } a_p \notin \mathrm{B}_s, \forall\, p \geqslant t \qquad [2]$$

Tomando entonces p, q cualesquiera, con tal que

$$p, q \geqslant m_n = \max\{n + 2r + 1, t\}$$

se tiene:

$$\epsilon_{p,q}\, 10^{p+q} = 10^q\left[\frac{10^{2p}}{a_p\, 10^p}\right] - 10^p\left[\frac{10^{2q}}{a_q\, 10^q}\right] \leqslant \left[\frac{10^{2p+q}}{a_p\, 10^q}\right] -$$

$$-\left[10^p\left[\frac{10^{2q}}{a_q\, 10^q}\right]\right] \leqslant \left[\frac{10^{2p+q}}{a_p\, 10^p} - 10^p\left[\frac{10^{2q}}{a_q\, 10^q}\right]\right] + 1 =$$

$$= \left[10^p\left(\frac{10^{p+q}}{a_p\, 10^p} - \left[\frac{10^{2q}}{a_q\, 10^q}\right]\right)\right] + 1 \leqslant$$

$$\leqslant \left[10^p\left(\frac{10^{p+q}}{a_p\, 10^p} - \frac{10^{2q}}{a_q\, 10^q} + 1\right)\right] + 1 =$$

$$= \left[10^p\left(\frac{(a_q - a_p)\, 10^{2q+p}}{a_p\, 10^p\, a_q\, 10^q} + 1\right)\right] + 1 \leqslant$$

teniendo en cuenta [1] y [2]:

$$\leqslant \left[10^p\left(\frac{\dfrac{1}{10^l}\cdot 10^{2q+p}}{\dfrac{1}{10^{2r}}\cdot 10^{p+q}} + 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{10^{p+q+2r}}{10^l} + 10^p\right] + 1 =$$

$$= [10^{p+q+2r-l} + 10^p] + 1 = [10^{l'+2r} + 10^p] + 1 < 10^{l'+2r+1}$$

Por tanto:

$$\epsilon_{p,q} < \frac{10^{l'+2r+1}}{10^{p+q}} = \frac{10^{2r+1}}{10^l} \leqslant \frac{10^{2r+1}}{10^{m_n}} \leqslant \frac{1}{10^n}$$

Análogamente

$$\epsilon_{q,p} \leqslant \frac{1}{10^n}\,.$$

Luego

$\forall\, n \in \mathbf{Z}$, $\exists m_n = \max\{n + 2r + 1, t\}$, $\forall p, q \geqslant m_n$ es $c_p - c_q \in B_n$

luego (c_n) es de Cauchy.

b) $1 - (a_n)(c_n) \in \mathbf{M}_0$. En efecto:

$$a_n\, c_n = \frac{a_n}{10^n}\left[\frac{10^{2n}}{a_n\, 10^n}\right] \leqslant \frac{a_n \cdot 10^{2n}}{10^n \cdot a_n\, 10^n} = 1, \forall\, n \geqslant r$$

es decir

$$1 - (a_n)(c_n) \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, u \geqslant r$$

Por otra parte:

$$a_n\left[\frac{10^{2n}}{a_n\, 10^n}\right] \geqslant \left[a_n\left[\frac{10^{2n}}{a_n\, 10^n}\right]\right] \geqslant \left[a_n\left(\frac{10^{2n}}{a_n\, 10^n} - 1\right)\right] =$$

$$= [10^n - a_n] \geqslant 10^n - [a_n] - 1$$

de donde

$$-\, a_n\left[\frac{10^{2n}}{a_n\, 10^n}\right] \leqslant -\, 10^n + [a_n] + 1$$

Como (a_n) es de Canduy, $\exists\, u \in \mathbf{N}$, tal que $[a_n] + 1 \leqslant 10^u$, y entonces

$$1 - a_p\, c_p = 1 - \frac{a_p}{10^p}\left[\frac{10^{2p}}{a_p\, 10^p}\right] =$$

$$= \frac{1}{10^p}\left(10^p - a_p\left[\frac{10^{2p}}{a_p\, 10^p}\right]\right) \leqslant \frac{1}{10^p}\,(10^p - 10^p + [a_p] + 1) =$$

$$= \frac{[a_p] + 1}{10^p} \leqslant \frac{10^u}{10^p} \leqslant \frac{10^u}{10^{m_n}} = \frac{1}{10^n}$$

es decir, $\forall\, n \in \mathbf{Z}$, $\exists m_n = n + u$, tal que $\forall\, p \geqslant m_n$ es $1 - a_p\, c_p \in \mathrm{B}_n$, luego $1 - (a_n)(e_n) \in \mathbf{M}_0$. Llamando $b_n = d\,(c_n)$, se tiene:

$1 - a_n\, b_n = 1 - a_n\, d\,(c_n) = 1 - a_n\, c_n + a_n\,(c_n - d(c_n)) \in \mathbf{M_0}$ y por la proposición 21 es $d(1) = d(a_n \cdot b_n) = (a_n) \cdot (b_n)$. #