GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE STONE

por

JAYME MACHADO CARDOSO

Stone em [3] mostrou que tôda álgebra de Boole $(B, \wedge, \vee, ', 1, 0)$ é anel de Boole para as operações

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \tag{1}$$

$$x \cdot y = x \wedge y \tag{2}$$

e, reciprocamente, todo anel de Boole com unidade é álgebra de Boole, com ínfimo e supremo dados por

$$x \wedge y = x \cdot y \tag{3}$$

$$x \vee y = x + y + x \cdot y \tag{4}$$

Em [1] apresentamos as mais gerais expressões para o ínfimo e o supremo, que se podem definir em um anel de Boole, de modo a transformá-lo em álgebra de Boole. O objetivo do presente trabalho é justamente obter as fórmulas inversas, isto é, as mais gerais expressões que se podem definir em uma álgebra de Boole, de modo à transformá-la em anel de Boole.

Seja, então $(B, \wedge, \vee, ', 1, 0)$ uma algebra de Boole e suponhamos que $x \oplus y = f(x, y)$ e $x \otimes y = g(x, y)$ sejam as mais gerais expressões que se podem definir em B, de modo que $(B, \oplus, \otimes)$ seja anel de Boole.

A função booleana f pode ser escrita (ver. p. ex. [2]) na forma

$$f(x, y) = a + bx + cy + dxy \tag{5}$$

onde a, b, c, d são constantes em B, e onde $rs = r \wedge s$ e $r + s = (r \wedge s') \vee \vee (r' \wedge s)$. Nosso objetivo é calcular as constantes a, b, c, d.

No anel de Boole, $x \otimes x = x$ para todo elemento x do anel, e se o elemento $z \in B$ fôr tomado como zero do anel, devemos ter $z \oplus x = x$ e $x \oplus z = z$, para todo $x \in B$.

Como $0 \oplus 0 = z = a$, resulta que a (5) pode ser escrita

$$f(x, y) = z + bx + cy + dxy$$

Mas, devemos ter

$$1 \oplus 1 = z = z + b + c + d \tag{6}$$

$$z \oplus z = z = z + bz + cz + dz \tag{7}$$

$$z \oplus 0 = z + bz \tag{8}$$

$$1 \oplus z = 1 = z + b + cz + dz \tag{9}$$

$$z \oplus 1 = 1 = z + bz + c + dz \tag{10}$$

Das (7) (8) e (9), vem $b = 1$, e das (7), (8) e (10) vem $c = 1$. Finalmente. se $b = c = 1$, da (6) vem $d = 0$, ou seja

$$x \oplus y = z + x + y$$

isto é,

$$x \oplus y = (z \wedge x \wedge y) \vee (z' \wedge x \wedge y') \vee (z' \wedge x' \wedge y) \vee (z \wedge x' \wedge y'). \tag{11}$$

Analogamente, a função booleana $x \otimes y = g(x, y)$ pode ser escrita

$$g(x, y) = a' + b'x + c'y + d'xy,$$

onde a', b', c', d' são constantes em B. e onde $rs = r \wedge s$ e $r + s = (r \wedge s') \vee (r' \wedge s)$.

Como no anel de Boole $x \otimes x = x$ para todo x do anel, temos

$$0 \otimes 0 = 0 = a'$$

$$1 \otimes 1 = 1 = a' + b' + c' + d'$$

e, portanto, a $g(x, y)$ se escreve na forma

$$g(x, y) = x \otimes y = b'x + c'y + d'xy.$$

Além disso, devemos ter

$$1 \otimes z = z = b' + c'z + d'z$$

$$z \otimes 1 = z = b'z + c' + d'z$$

$$0 \otimes z = z = c'z$$

$$z \otimes z = z = b'z,$$

donde resulta $b' = c' = z$ e $d' = 1$. Fntão,

$$x \otimes y = xy + z(x + y) = (x \wedge y) \vee [z \wedge (x \vee y)]. \tag{12}$$

Em particular, fazendo-se $z = 0$ nas (11) e (12) obtém-se, respectivamente, as (1) e (2).

REFERENCIAS

[1] Cardoso, J. M.: *Notices of Amer. Math. Soc.*, 1970, v. 17, p. 939, 1084.

[2] Rosembloom, P.: *The Elements of Mathematical Logic.* Dover Pub. 1950.

[3] Stone, M. H.: *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1936, v. 40, pp. 37-111