NOTA SOBRE EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA UNA CIERTA CLASE DE FUNCIONES

por

GONZALO GONZALEZ DE BUITRAGO DIAZ

Se trata en esta nota de obtener un afinamiento del teorema del valor medio, para un tipo particular de funciones. Comenzaremos probando el siguiente lema:

Lema.—Si

$$x \geqslant 0,\ n \in \mathrm{N};\ x^n \geqslant nx \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$

Demostración:

$$x^n = \left[\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right]^n \geqslant 2n \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = n\,x \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}.$$

Utilizando esta desigualdad podemos ahora obtener el resultado antes indicado, que puede resumirse en el teorema siguiente:

Teorema. Si f es una función real no negativa, indefinidamente derivable en un intervalo abierto I de R, que verifica las condiciones $f^{(n)}(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathrm{I}$, $\forall\, n \in \mathrm{N}$, entonces para cada par de puntos, a, b de I, $(a < b)$ se verifica

$$f(b) - f(a) \geqslant (b - a)\, f'\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

o lo que es lo mismo (dado que f' es creciente):

$$f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

donde

$$\frac{a + b}{2} \leqslant c < b$$

Demostración: Según un conocido teorema debido a Bernstein, $f(x)$ es analítica en I, y para $a \leqslant x$. $x \in$ I se verifica:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

En particular,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

Por el lema anterior, para $k \geqslant 1$ se verifica:

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \geqslant \frac{f^{(k)}(a)}{k!}k(b-a)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k-1} =$$

$$= (b-a)\frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k-1}$$

Dando a k los valores $k = 1 \ldots, n$, y sumando,

$$\frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \geqslant$$

$$\geqslant (b-a)\left[f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}\left(\frac{b-a}{2}\right) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n-1}\right]$$

Cuando $n \to \infty$ se obtiene:

$$f(b) - f(a) \geqslant (b-a)\, f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \text{c.q.d.}$$

Aplicaciones

1) Si $0 \leqslant x \leqslant y$, entonces

$$n(y-x)y^{n-1} \geqslant y^n - x^n \geqslant n(y-x)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{n-1}$$

resultado que mejora las desigualdades usuales:

$$n(y-x)y^{n-1} \geqslant y^n - x^n \geqslant n(y-x)\, x^{n-1}$$

2) Si $f(x) = e^x$ se verifica

$$e^b - e^a \geqslant (b-a)\, e^{\frac{a+b}{2}}, \text{ (siendo } a \leqslant b\text{);}$$

poniendo, $a = \log n$; $b = \log(n + 1)$; $n \in \mathrm{N}$; se obtiene:

$$\frac{n + 1 - n}{\log\left(\dfrac{n + 1}{n}\right)} > \sqrt{n(n + 1)} \iff \log\left(\frac{n + 1}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n(n + 1)}}$$

lo que permite escribir:

$$\frac{1}{n + 1} < \log\left(\frac{n + 1}{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n(n + 1)}}$$

en lugar de las conocidas desigualdades

$$\frac{1}{n + 1} < \log\left(\frac{n + 1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$