SOBRE UNA CONJETURA DE A. PEREZ DE VARGAS Y M. QUIROS

por

CARLOS SIMÓ

En [2] se prueba que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k = 0$$

si $k < n$, y se conjetura que para $k \geqslant n$ dicha fórmula es falsa.

Usando dos representaciones distintas de las diferencias finitas, redemostramos la fórmula anterior y establecemos la certeza de la conjetura.

En efecto, se sabe ([1], p. 262) que

$$\Delta^n f(o) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(i),$$

y que para funciones C^n, $\Delta^n f^{(o)} = f^{(n)}(\xi)$, $\xi \in (0, n)$. Si f es polinomial, podemos escribir, por tanto:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(i) = f^{(n)}(\xi),\ \xi \in (0, n).$$

En este caso interesa $f(i) = i^k$. Si $k < n$ trivialmente $f^{(n)}(\xi) = 0$, y si $k \geqslant n$,

$$f^{(n)}(\xi) = \prod_{i=0}^{n-1} (k - i) \cdot \xi^{k-n}$$

no nulo en ξ, con lo que acaba la prueba de la siguiente

Proposición:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k = 0$$

si y sólo si $k < n$, ($k \in \mathrm{N}$, $n > 0$).

BIBLIOGRAFIA

[1] ISAACSON, E.; KELLER, H. B.: *Analysis of Numerical Methods*, Wiley, 1966.

[2] PÉREZ DE VARGAS, A.; QUIRÓS, M.: «*Una fórmula de interés en física de partículas*», *Gaceta Matemática*, primera serie, tomo XXVI. 1 y 2 (1974).

Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Barcelona.