SOBRE ANÉIS DE BOOLE SEM UNIDADE

por

JAYME MACHADO CARDOSO

Em [1], generalizando um conhecido resultado de Stone [2], mostramos que todo anel de Boole B com unidade 1 é álgebra de Boole para as seguintes operações

$$x \wedge y = q(x + y) + xy \qquad [1]$$

$$x \wedge y = (1 + q)(x + y) + xy \qquad [2]$$

onde q é elemento fixo de B. Em particular, para $q = 0$ obtém-se as fórmulas de Stone.

O objetivo desta nota é demonstrar que não é possível definir estrutura de álgebra de Boole em um anel de Boole sem unidade. O que faremos é mostrar que não é possível definir no anel estrutura de reticulado com menor elemento.

Para tal, seja B anel de Boole sem unidade, e $\wedge$ uma lei de composição interna de B que será tomada como operação da álgebra de Boole que fornece o ínfimo de dois quaisquer elementos de B. A mais geral expressão para tal operação será da forma

$$x \wedge y = axy + bx + cy + d\,,$$

onde $a,b,c,d,$ são elementos fixos de B.

Indicando com 0 o zero de B, devemos ter $0 \wedge 0 = 0$, donde resulta $d = 0$.

Além disso, deve existir em B un elemento p, que será o maior elemento da álgebra, com a propriedade de ser $x \wedge p = p \wedge x$, para todo $x \in$ B, e um elemento q, que será o menor elemento da álgebra, com a propriedade de ser $x \wedge q = q \wedge x = q$, para todo $x \in$ B. Então

$$0 \wedge q = q = cq \qquad [3]$$

$$q \wedge 0 = q = bq \qquad [4]$$

$$0 \wedge p = 0 = cp \qquad [5]$$

$$p \wedge 0 = 0 = bp \qquad [6]$$

$$p \wedge p = p = ap \qquad [7]$$

$$q \wedge q = q = aq \qquad [8]$$

$$p \wedge q = q = apq + bp + cq \qquad [9]$$

Tendo em vista as [5], [6] e [7], da [9] resulta $pq = 0$. Além disso,

$$a \wedge q = q = aq + ba + cq$$
$$q \wedge a = q = aq + bq + ca$$

donde, pelas [3], [4] e [8], resulta

$$ca = ba = q \qquad [10]$$

Por outro lado,

$$a \wedge p = a = ap + ba + cq$$

e, pelas [3], [7] e [10], vem

$$a = p + q$$

Finalmente, de

$$b \wedge q = q = abq + b + cq$$
$$q \wedge c = q = aqc + bq + c$$

e das [3], [4] e [8] e do fato de que todo anel de Boole é comutativo, vem

$$b = c = q$$

Em definitivo, deveríamos ter

$$x \wedge y = (p + q)\, xy + q(x + y) \qquad [11]$$

Porém, como deve ser $x \wedge x = x$, para todo $x \in B$, resulta

$$x = (p + q)x$$

que é possível apenas no caso em que $p + q$ é unidade de B, o que é contrário à hipótese. Em particular, se B tem unidade 1, a [11] coincide com [1].

REFERÊNCIAS

1. Cardoso, J. M.: «*Anéis de Boole e Algebras de Boole*». *Rev. Fac. Ci. Lisboa*, 2a. sér. A, v. 13 (1971), p. 139-41.

2. Stone, M. H.: «The Theory of Representation for Boolean Algebras». *Trans. Amer. Math. Soc.* v. 40 (1936), p. 37-111.

Universidade Federal do Paraná, Brasil.