DERIVADAS DEL ALGEBRA DE TENSORES

por

JULIO LEÓN ALVAREZ

INTRODUCCIÓN

En nuestra Tesis Doctoral (1), a partir de un anillo A conmutativo y con elemento unidad, se definía la derivada del A-módulo M respecto o en la dirección del A-vector x, D_x, como el conjunto de endomorfismos aditivos de M y todos sus módulos asociados que verifique:

I) $D_x a = Xa \ , \ \forall \ a \in A.$

II) $D_x(a\,K) = xa \cdot K + a \cdot D_x K \ . \ \forall \ K \in M.$

III) $$(D_x\,K)\,(K_1, \ldots , K_n) = D_x(K(K_1, \ldots , K_n)) - \\ - \sum_{i=1}^{n} K(K_1, \ldots , D_x\,K_i, \ldots , K_n), \ \forall \ K_i \in M t_i$$

donde Mt_i es el módulo t_i asociado a M.

En el álgebra de los tensores de M se comprobaron las siguientes propiedades de la derivada:

a) $D_x\,(L \otimes N) = D_x\,L \otimes N + L \otimes D_x N$, L y N tensores de M

b) $D_x\,(c\,L) = c(D_x\,L)$, c contracción tensorial.

Partiendo de estos supuestos queremos encontrar, como particularizaciones. las derivadas de Lie y covariante del álgebra de tensores, cuando $M = v(A)$ módulo de los vectores de A (A-vectores). Que es el caso de interés en la geometría de Variedades Diferenciables.

DERIVADA DE LIE

Sea, de acuerdo con lo anterior, $v(A)$ el módulo de vectores de A, que posee una base canónica o natural

$$\{\partial_1, \ldots , \partial_n\} \ , \ \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

y la dual $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$. La derivada de Lie del tensor (r, s) T del álgebra de tensores de $v(A)$ se obtendrá de

$$(L_x T)(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) =$$
$$= L_x(T(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, d^{j_r})) -$$
$$-\sum_{m=1}^{s} T(\partial_{i_1}, \ldots, L_x \partial_{i_m}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) -$$
$$-\sum_{m=1}^{r} T(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, L_x dx^{j_m}, \ldots, dx^{j_r}) \qquad [1]$$

con las condiciones

$$L_{x+y} = L_x + L_y \; ; \; L_{[x,y]} = [L_x, L_y] \;, \; \forall\, x, y \in v(A)$$

Los covectores de A, elementos del módulo dual $v^*(A) = L(v(A); A)$ pueden definirse también a partir de elementos de A, puesto que $\forall\, a \in A$, $da \in v^*(A)$, que actúan sobre todo vector x según $da\,(x) = x\,a \in A$.

Sean $\omega \in v^*(A)$, $y \in v(A)$, entonces según [1]:

$$(L_x\, \omega)(y) = L_x(\omega(y)) - \omega\,(L_x\, y), \qquad [2]$$

nos da la derivada de Lie de ω.

Puesto que $L_x(dx^j(\partial_i)) = L_x\, \delta_i{}^j = 0$, según [2] será

$$(L_x\, dx^j)(\partial_i) + dx^j(L_x\, \partial_i) = 0 \qquad [3]$$

Si $x = a^j\, \partial_j$, de donde (2):

$$L_x\, dx^j = \partial_l\, a^j \cdot dx^l \qquad [4]$$

y

$$L_x\, \partial_i = -\,\partial_i\, a^j \cdot \partial_j \qquad [5]$$

Teorema

«L_x así definida, en el módulo $v(A)$ queda unívocamente determinada por $[x, y]$.»

Demostración

Es trivial comprobar que $[x, y]$ es una derivada de Lie de y en la dirección x. La univocidad queda comprobada como sigue: Dado $L_x\, y = [x, y]$, supongamos dada otra derivada definida por [1] $D_x\, y$. Si

$$x = a^j\, \partial_j \;, \; y = b^i\, \partial_i$$

entonces

$$D_x\, y = D_x(b^i\, \partial_i) = b^i\, D_x\, \partial_i + x\, b^i \cdot \partial_i \;,$$

y según [5]

$$D_x y = - b^i \cdot \partial_i a^j \cdot \partial_j + a^j \partial_j b^l \cdot \partial_l =$$

$$= (a^j \cdot \partial_j b^i - b^j \cdot \partial_j a^i) \partial_i = [x, y] = L_x y \qquad \text{c.q.d.}$$

Como consecuencia inmediata [2] se escribirá:

$$(L_x \omega)(y) = L_x(\omega(y)) - \omega([x, y]) \qquad [6]$$

Según [4] y [5] podrá escribirse [1] de la siguiente manera:

$$(L_x T)(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) = L_x(T(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r})) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s} \partial_{i_m} a^h \, T(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_h, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) -$$

$$- \sum_{m=1}^{r} \partial_h a^{j_m} \, T(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^h, \ldots, dx^{j_r})$$

o expresado en coordenadas de T.

$$\{L_x T\}^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} = x \, T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{r} \partial_h a^{j_m} \, T^{j_1, \ldots, j_{m-1}, h, j_{m+1}, \ldots j_r}_{i_1, \ldots, i_s} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s} \partial_{i_m} a^h \, T^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots i_{m-1}, h, i_{m+1}, \ldots, i_s} \qquad [7]$$

En (1) definimos en un A-módulo M la aplicación $Q^L(b, x) = L_{bx} - b \, L_x \in L(M; M)$, $\forall \, b \in A$. El valor de Q^L se conoce en algunos casos:

$\forall \, y \in v(A)$, $Q^L(b, x) \, y = - y \, b \cdot x$; $\forall \, \omega \in v^*(A)$, $Q^L(b, x) \, \omega = \omega(x) \cdot db$

La expresión correspondiente para el tensor T se obtendrá de:

$$\{L_{bx} T\}^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} = bx \, T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{r} \partial_h (b a^{j_m}) \, T^{j_1, \ldots j_{m-1}, h, j_{m+1}, \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s} \partial_{i_m} (b a^h)\, T^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_{m-1}, h, i_{m+1}, \dots i_s} =$$

$$= b \left\{ L_x T \right\}^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_s} - \sum_{m=1}^{r} \partial_h b \cdot a^{j_m}\, T^{j_1 \dots j_{m-1}, h, j_{m+1}, \dots j_r}_{i_1 \dots i_s} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{s} \partial_{i_m} b \cdot a^h\, T^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_{m-1}, h, i_{m+1}, \dots i_s}$$

Luego

$$\left\{ Q_L (b, x)\, T \right\}^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_s} = \sum_{m=1}^{s} \partial_{i_m} b \cdot a^h\, T^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_{m-1}, h, i_{m+1}, \dots i_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{r} \partial_h b \cdot a^{j_m}\, T^{j_1 \dots j_{m-1}, h, j_{m+1}, \dots j_r}_{i_1 \dots i_s} \qquad [8]$$

Definición (según Bishop-Goldberg (3)).

Se entiende por operador $\mathbf{D}_I$ a la derivada tensorial, en la que I es un tensor (1, 1), que opera de la siguiente manera:

i) $\mathbf{D}_I\, a = 0,\ \forall\, a \in A$
ii) $\mathbf{D}_I\, x = I x\ ,\ \forall\, x \in v(A)$
iii) Sea T un tensor de orden (r, s).

$$\left(\mathbf{D}_I\, T \right)^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_s} = \sum_{m=1}^{r} T^{j_1 \dots j_{m-1}, h, j_{m+1}, \dots j_r}_{i_1 \dots i_s}\, I^{j_m}_{h} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} T^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_{m-1}, h, i_{m+1}, \dots, i_s}\, I^{h}_{i_m}$$

Que goza de las propiedades inmediatas:

1) $\forall\, a \in A,\ \mathbf{D}_{aI} = a\, \mathbf{D}_I$
2) Para dos tensores (1, 1) cualesquiera $\mathbf{D}_{I+I'} = \mathbf{D}_I + \mathbf{D}_{I'}$

Puesto que

$$\forall\ x \in v(\mathrm{A})\ \text{y}\ b \in \mathrm{A}\ ,\ x \otimes db \in L(v(\mathrm{A});\ v(\mathrm{A}))$$

ya que

$$(x \otimes db)\ y = x \cdot (db(y)) = x \cdot y\ b \in v(\mathrm{A})$$

concluiremos que

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{L}}(b,\ x)\mathrm{T} = -\ \mathbf{D}_{x \otimes db}\ \mathrm{T} \qquad [9]$$

Derivada covariantf

De la definición general se deduce la correspondiente a la derivada covariante de T por:

$$(\nabla_x \mathrm{T})\,(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) = \nabla_x(\mathrm{T}(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r})\,) -$$

$$- \sum_{m\,=\,1}^{s} \mathrm{T}(\partial_{i_1}, \ldots, \nabla_x\, \partial_{i_m}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) -$$

$$- \sum_{m\,=\,1}^{r} \mathrm{T}(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, \nabla_x\, dx^{j_m}, \ldots\ dx^{j_r})$$

junto con las propiedades características de ∇_x:

$$\nabla_{x+y} = \nabla_x + \nabla_y \quad ; \quad \nabla_{ax} = a\ \nabla_x$$

según las cuales:

$$\nabla_x\ \partial_{i_m} = \nabla_{a^l \partial_l}\ \partial_{i_m} = a^l\ \nabla_{\partial_l}\, \partial_{i_m} = a^l\, \Gamma^{h}_{l i_m}\ \partial_h.$$

Para obtener una expresión análoga para $\nabla_x\ dx^{j_m}$ hay que comprobar que:

$$\nabla_{\partial_l} dx^{j_m} = \overset{*}{\Gamma}{}^{j_m}_{lh}\ dx^h = -\ \Gamma^{j_m}_{lh}\ dx^h$$

en efecto, pues si

$$y = b^i\ \partial_i \in v(\mathrm{A}) \quad \text{y} \quad \omega = \omega_i\ dx^i \in v^*(\mathrm{A})$$

la derivada ∇_x del producto contraido $y \otimes \omega$ será el tensor contraido $\nabla_x\, y \otimes \omega + y \otimes \nabla_x\, \omega$, en virtud de las propiedades de las derivadas.

Las componentes contraidas de $\nabla_x(y \otimes \omega)$ son:

$$a^h\ \nabla_{\partial_h}(b^i\ \omega_i) = a^h\ \partial_h(b^i\ \omega_i) = a^h(\partial_h\, b^i \cdot \omega_i + b^i \cdot \partial_h\ \omega_i)$$

Las componentes de $\nabla_x y \otimes \omega + y \otimes \nabla_x \omega$ son:

$$a^h(\nabla_{\partial_h} b^i \cdot \omega_j + b^i \cdot \nabla_{\partial_h} \omega_j) = a_h(\partial_h b^i \cdot \omega_j + \Gamma^j_{hi} b^i \cdot \omega_j + b^i \cdot \partial_h \omega_j + b^i \overset{*}{\Gamma}{}^j_{hi} \omega_j),$$

contrayendo i, j:

$$= a^h(\partial_h b^i \cdot \omega_i + b^i \cdot \partial_h \omega_i + \Gamma^j_{hi} b^i \cdot \omega_j + b^i \overset{*}{\Gamma}{}^j_{hi} \omega_j)$$

para que ambas expresiones sean equivalentes deberá ser:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^j_{hi} = -\Gamma^j_{hi}.$$

Por lo tanto

$$\nabla_x dx^{j_m} = \nabla_{a^l \partial_l} dx^{j_m} = a^l \nabla_{\partial_l} dx^{j_m} = - a^l \Gamma^{j_m}_{lh} dx^h,$$

de donde

$$(\nabla_x \mathrm{T})(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) = \nabla_x(\mathrm{T}(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r})) -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} a^l \Gamma^h_{l i_m} \mathrm{T}(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_h, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_r}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} a^l \Gamma^{j_m}_{lh} \mathrm{T}(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_s}, dx^{j_1}, \ldots, dx^h, \ldots, dx^{j_r})$$

o en coordenadas

$$\left\{\nabla_x \mathrm{T}\right\}^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} = x\, \mathrm{T}^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} +$$

$$\sum_{m=1}^{r} a^l \Gamma^{j_m}_{lh} \mathrm{T}^{j_1, \ldots, j_{m-1}, h, j_{m+1}, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} a^l \Gamma^h_{l i_m} \mathrm{T}^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_{m-1}, h, i_{m+1}, \ldots, i_s} \qquad [10]$$

Consideremos ahora la aplicación $\mathrm{S} : \upsilon(\mathrm{A}) \longrightarrow L(\mathrm{M};\ \mathrm{M})$, definida por $S(x) = \Delta_x - L_x$, $\forall\, x \in v(A)$, cuya expresión en coordenadas para el tensor T es, según [7] y [10]:

$$\left\{ S(x, T) \right\}^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} =$$

$$= \sum_{m=1}^{r} (a^l \Gamma^{j_m}_{lh} + \partial_h a^{j_m}) \, T^{j_1, \ldots, j_{m-1}, h, j_{m+1}, \ldots, j_r}_{i_1 \ldots i_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} (a^l \Gamma^{h}_{l i_m} + \partial_{i_m} a^h) \, T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1, \ldots, i_{m-1}, h, i_{m+1}, \ldots, i_s} \qquad [11]$$

La expresión anterior aplicada a $y = b^j \partial_j$ es:

$$(S(x, y))^j = (a^l \Gamma^j_{lh} + \partial_h a^j)\, b^h = a^l \Gamma^j_{lh}\, b^h + b^h \partial_h a^j,$$

que recuerda las coordenadas de una derivada covariante. Fácilmente se comprueba que, además, posee las propiedades de la derivada covariante invertida $\Delta_y\, x$. Si en $\nabla_x\, y - L_x\, y = \Delta_y\, x$ se impone la condición $\nabla = \Delta$ se obtiene la conexión de Lie en $v(A)$ (1).

Según [10]

$$(\nabla_x\, y)^j = a^l \Gamma^j_{lh}\, b^h + a^i \partial_i b^j$$

y

$$(\nabla_y\, x)^j = b^l \Gamma^j_{lh}\, a^h + b^i \partial_i a^j$$

de donde

$$(\nabla_x\, y - \nabla_y\, x)^j = a^i \partial_i b^j - b^i \partial_i a^j + a^l \Gamma^j_{lh}\, b^h - a^h \Gamma^j_{lh}\, b^l = [x, y]^j$$

si

$$\Gamma^j_{lh} = \Gamma^j_{hl},$$

es decir, las conexiones simétricas son de Lie; resultado que obtuvimos en (1) por medio de la Torsión.

En este caso, y teniendo presente que la diferencial absoluta (o covariante) de x, ∇x, es (4), el tensor (1,1):

$$\nabla x = \nabla_{\partial_h} a^i \,(\partial_i \otimes dx^h) = (\partial_h a^i + a^l \Gamma^i_{hl})\,(\partial_i \otimes dx^h)$$

luego [11] se escribirá:

$$\left\{ S(x, T) \right\}^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} = \sum_{m=1}^{r} \nabla_{\partial_h} a^{j_m} T^{j_1, \ldots, j_{m-1}, h, j_{m+1}, \ldots, j_r}_{i_1 \ldots i_s} -$$

$$- \sum_{m=1}^{s} \nabla_{\partial_{i_m}} a^h T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1, \ldots, i_{m-1}, h, i_{m+1}, \ldots, i_s}$$

por lo tanto

$$S(x, T) = \mathbf{D}_{\nabla x} T \qquad [12]$$

para las conexiones simétricas existe la relación con la derivada de Lie:

$$\nabla x = L_x + \mathbf{D}_{\nabla x}$$

Además,

$$\nabla x = \nabla(a^i \partial_i) = \partial_i \otimes da^i + a^i \nabla \partial_i = \partial_i \otimes da^i + a^j \Gamma^i_{hj} \partial_i \otimes dx^h$$

luego,

$$\mathbf{D}_{\nabla x} = \mathbf{D}_{\partial_i \otimes da^i} + a^j \Gamma^i_{hj} \mathbf{D}_{\partial_i \otimes dx^h} = - (Q^L(a^i, \partial_i) +$$

$$+ a^j \Gamma^i_{hj} Q^L(x^h, \partial_i)) = - (Q^k_{ij} (a^i) \partial_k \otimes dx^j +$$

$$+ a^j \Gamma^i_{hj} Q^k_{ij} (x^h) \partial_k \otimes dx^j),$$

según los coeficientes de Q^L definidos en (1).

BIBLIOGRAFIA

1. J. León Alvarez: *Derivaciones y conexiones en módulos*. Tesis. Facultad de Ciencias. Univ. Complut. Madrid, 1974 (en publicación).
2. J. J. Etayo: *Una demostración formal sobre la derivada de Lie de un campo*. Act. X. Reunión Matem. Españoles, 1972.
3. R. L. Bishop, S. I. Goldberg: *Tensor Analysis on Manifolds*. McMillan, N. Y., 1968.
4. Y. Choquet: *Géométrie différentielle et systémes extérieurs*. Dunod 1968.