EL SISTEMA IMAGEN EN LOS SISTEMAS DISIPATIVOS MARCOFIANOS

por

M.ª Purificación Hervas Burgos

RESUMEN

Con el fin de que el campo de fuerzas de un sistema disipativo marcofiano sea una forma semibásica cerrada de Pfaff, se introduce el concepto de sistema «antidisipativo». Se define el sistema imagen; mediante la proposición I se establece que dicho sistema es antidisipativo. La proposición II formula que los operadores de A y $\bar{A}$ son adjuntos. Para la construcción de la lagrangiana del sistema $< A, \bar{A} >$ se dan tres lemas, que conducen a la poposición III. Seguidamente se determina la hamiltoniana de $<A, \bar{A}>$ y la proposición IV señala las condiciones bajo las cuales la Hamiltoniana es una constante de evolución..

* * *

Sabido es que la hamiltoniana de un sistema disipativo marcofiano es una constante de evolución, aunque dicha hamiltoniana no dependa explícitamente del tiempo. Por esta razón se asocia al sistema disipativo dado otro sistema hipotético «antidisipativo», el cual absorbe la energía disipada por el primero, con lo cual la energía total del sistema compuesto permanece constante.

Por otra parte, el campo disipativo marcofiano introduce en las ecuaciones de evolución términos lineales respecto a las velocidades generalizadas, lo que implica que dichas ecuaciones no sean invariantes a la inversión del tiempo o, lo que es lo mismo, no satisfagan al Principio de Reversibilidad Mecánica. Este hecho nos induce a introducir en escena el sistema imagen de un sistema disipativo.

Definición

Un sistema $\bar{A}$ se dice imagen de un sistema mecánico dado A, cuando el punto representativo del sistema $\bar{A}$, en el espacio de las configuraciones satisface a

$$\bar{q}_i(t) = q_i(-t) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Proposición I

El sistema imagen $\bar{A}$ del sistema mecánico A es un sistema antidisipativo del sistema A.

Demostración

Si

$$\bar{q}_j(t) = - q_j(t) \Rightarrow \dot{\bar{q}}_j = - \dot{q}_j \Rightarrow$$

$$b_{ij}\, \dot{\bar{q}}_j = - b_{ij}\, \dot{q}_j \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{R}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}$$

Como

$$\delta \bar{q}_i = \delta q_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Para todo desplazamiento virtual resulta:

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \dot{\bar{q}}_j}\, \delta \bar{q}_j = - \frac{\partial R}{\partial q_j}\, \delta q_j$$

Es decir, en todo desplazamiento virtual el trabajo cedido por A es igual al tomado por $\bar{A}$.

Ecuaciones de evolución del sistema imagen

Tratándose de sistemas disipativos marcofianos con vínculos independientes del tiempo, la energía cinética del sistema:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_{ij}\, a_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \quad ; \quad a_{ij} = a_{ij}\,(q_1, \ldots q_n)$$

que por ser cuadrática en $\dot{q}$ es un invariante a la inversión del tiempo. La energía potencial $u(q_i)$ es independiente del tiempo. Lo que implica que $L(q, \dot{q})$ sea un invariante a la inversión del tiempo.

Luego si las ecuaciones de evolución de A son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Las del sistema $\bar{A}$ son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_i}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_i} - \frac{\partial \bar{R}}{\partial \dot{\bar{q}}_i} = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Proposición II

Si los coeficientes a_{ij} son constantes y $u(q_i)$ es una forma cuadrática homogénea, los operadores de las ecuaciones de evolución del sistema imagen son los adjuntos de los operadores de las ecuaciones de evolución del sistema objeto.

Demostración

Si designamos por θ y $\overline{\theta}$, respectivamente, los operadores del sistema A y $\overline{\text{A}}$.

$$\theta\, q_i = a_{ij}\, \ddot{q}_i + b_{ij}\, \dot{q}_i + c_{ij}\, q_i = 0$$

$$\overline{\theta}\, \overline{q}_i = a_{ij}\, \ddot{\overline{q}}_i - b_{ij}\, \dot{\overline{q}}_i + c_{ij}\, \overline{q}_i = 0$$

Tomando un espacio Hilbert en el intervalo de evolución $[t_1\ t_2]$. e imponiendo a los elementos de dicho espacio las condiciones:

1.º Que exista y tenga valor finito

$$\int_{t_1}^{t_2} (q^{(t)})^2\, dt$$

2.º Que $q^{(t_1)} = q^{(t_2)} = 0$.

Se tiene:

$$<\theta\, q, \overline{q}> - <q, \overline{\theta}\, \overline{q}> =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[a_{ij} \left(\overline{q}_i \frac{d\, q_i}{dt} - q_i \frac{d\, \overline{q}_i}{dt} \right) + b_{ij}\, q_i\, \overline{q}_i \right] dt = 0 \implies \overline{\theta} = \theta^{+}$$

Donde la forma bilineal concomitante viene dada por:

$$p(q\, \overline{q}) = \left[a_{ij}\, q_i\, \dot{\overline{q}}_i - \overline{q}_i \frac{d}{dt} (a_{ij}\, q_i) + b_{ij}\, q_i\, \overline{q}_i \right]$$

Nota 1. Es de observar que la mayor parte de los sistemas que se presentan en la práctica cumple las condiciones de la proposición anterior.

Construcción de la Lagrangiana del sistema <A, $\overline{\text{A}}$>

En lo que sigue admitiremos que, tanto las funciones $q_i(t)$ y $\overline{q}_i(t)$, como sus derivadas son diferenciables en el intervalo de evolución $[t_1\ t_2]$.

Para la construcción de la Lagrangiana del sistema objeto-imagen utilizaremos los siguientes lemas:

Lema 1.º

Si los coeficientes a_{ij} son constantes en el intervalo de evolución $[t_1\, t_2]$ y para $t = t_1$ y $t = t_2$

$$\delta q_i = \delta \bar{q}_i = 0$$

entonces:

$$-\delta \int_{t_1}^{t_2} a_{ij} \dot{\bar{q}}_i \dot{q}_j \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{q}_j) \, \delta \bar{q}_i \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{\bar{q}}_i) \, \delta q_j \, dt$$

Demostración:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{q}_j) \, \delta \bar{q}_i \, dt = a_{ij} \dot{q}_j \, \delta \bar{q}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} a_{ij} \dot{q}_j \, \delta \dot{\bar{q}}_i \, dt$$

Ahora bien: $\delta \bar{q}_i = 0$ para $t = t_1$ y $t = t_2$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{q}_j) \, \delta \bar{q}_i \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} a_{ij} \dot{q}_j \, \delta \dot{\bar{q}}_i \, dt$$

Análogamente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{\bar{q}}_i) \, \delta q_j \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} a_{ij} \dot{\bar{q}}_i \, \delta \dot{q}_j \, dt \Rightarrow$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{q}_j) \, \delta \bar{q}_i \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (a_{ij} \dot{\bar{q}}_i) \, \delta q_j \, dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} a_{ij} \dot{\bar{q}}_i \dot{q}_j \, dt$$

Lema 2.º

Si $\delta \bar{q}_j$ y $\delta \dot{\bar{q}}_i$ se anulan en $t = t_1$ y $t = t_2$, entonces

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \bar{q}_i - \frac{\partial \bar{R}}{\partial \dot{\bar{q}}_j} q_j \right) dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial R}{\partial q_i} \delta \bar{q}_i - \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{q}_j} \delta q_j \right) dt$$

Demostración:

$$R = \frac{1}{2} \Sigma_{ij}\, b_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \quad ; \quad \overline{R} = \frac{1}{2} \Sigma_{ij}\, b_{ij}\, \dot{\overline{q}}_i\, \dot{\overline{q}}_j$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = b_{ij}\, \dot{q}_j \quad ; \quad \frac{\partial \overline{R}}{\partial \dot{\overline{q}}_j} = b_{ij}\, \dot{\overline{q}}_i$$

$$R^* = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\, \overline{q}_i - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{q}_j}\, q_j = b_{ij}\, (\dot{q}_j\, \overline{q}_i - q_j\, \dot{\overline{q}}_i)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R^*}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial R^*}{\partial q_j}\right] \delta q_j = 2\, \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{q}_j}\, \delta q_j$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R^*}{\partial \dot{\overline{q}}_i}\right) - \frac{\partial R^*}{\partial \overline{q}_i}\right] \delta q_i = -2\, \frac{\partial R}{\partial q_i}\, \delta \overline{q}_i \quad \Rightarrow$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} R^*\, dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial R}{\partial q_i}\, \delta \overline{q}_i - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{q}_j}\, \delta q_j\right) dt$$

Lema 3.º

Si las funciones potenciales u y $\overline{u}$ cumplen la condición

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_j^2} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{q}_i^2}$$

existe una función u_{ij} tal que

$$\delta u_{ij} = \frac{\partial u}{\partial q_j}\, \delta \overline{q}_i + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{q}_i}\, \delta q_j$$

Demostración

La proposición anterior es equivalente a que la ecuación

$$d\, u_{ij} = \frac{\partial u}{\partial q_j}\, d\, \overline{q}_i + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{q}_i}\, d\, q_j$$

sea diferencial exacta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{q}_i^2}$$

Proposición III

Si el sistema <A, $\overline{A}$> cumple las condiciones de los lemas anteriores, su ley de evolución puede simbolizarse por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L^* \, dt = 0$$

Donde:

$$L^* = T^* - u^* - \frac{1}{2} R^*$$

$$T^* = a_{ij} \dot{\overline{q_i}} \dot{q}_j \qquad R^* = b_{ij} (\dot{q}_j \overline{q_i} - q_j \dot{\overline{q_i}})$$

$$u^* = \Sigma_{ij} u_{ij}$$

Demostración

Las ecuaciones de evolución de <A. $\overline{A}$>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial u}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\overline{q_j}}}\right) + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{q_j}} - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

Multiplicando la primera por $\delta \overline{q_i}$ y la segunda por δq_j, sumando e integrando, tenemos:

$$\Sigma_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta \overline{q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{\overline{q_j}}}\right) \delta q_j\right] dt +$$

$$+ \Sigma_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \delta \overline{q_i} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{q_j}} \delta q_j\right) dt +$$

$$+ \Sigma_{ij} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \delta \overline{q_i} - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \dot{\overline{q_j}}} \delta q_j\right) dt$$

En virtud del lema 1

$$\Sigma_{ij}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta \bar{q}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{\bar{q}}_j}\right)\delta q_j\right] dt = -\,\delta\int_{t_1}^{t_2} T^* \, dt$$

Del lema 2.

$$\Sigma ij\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\,\delta \bar{q}_i + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{q}_j}\,\delta q_j\right) dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} u^* \, dt$$

Del lema 3.

$$\Sigma_{ij}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\,\delta \bar{q}_i - \frac{\partial \bar{R}}{\partial \dot{\bar{q}}_j}\,\delta q_j\right) = -\,\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\,R^* \, dt$$

Hamiltoniana del Sistema

A partir de la Lagrangiana, L^*, se definen, como momentos conjugados de las coordenadas:

$$q_j \longrightarrow p_j = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} = a_{ij}\,\dot{\bar{q}}_i - \frac{1}{2}\,b_{ij}\,\bar{q}_i$$

$$\bar{q}_i \longrightarrow \bar{p}_i = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\bar{q}}_i} = a_{ij}\,\dot{q}_j + \frac{1}{2}\,b_{ij}\,q_j$$

Como función de Hamilton:

$$H^* = VL^* - L^* = \Sigma_i\,\dot{\bar{q}}_i\,\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\bar{q}}_i} + \Sigma_j\,\dot{q}_j\,\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} - L^* = a_{ij}\,\dot{\bar{q}}_i\,\dot{q}_j + u_{ij}$$

La transformación de Legendre en forma local, nos conduce a:

$$H^* = \left(p_j + \frac{1}{2}\,b_{ij}\,\bar{q}_i\right)(a_{ij})^{-1}\left(\bar{p}_i - \frac{1}{2}\,b_{ij}\,q_i\right) + u_{ij}$$

Proposición IV

Si H^* no depende explícitamente del tiempo, la hamiltoniana del sistema $\langle A, \bar{A}\rangle$ es una constante de evolución.

Demostración

$$\frac{d\mathrm{H}^*}{dt} = a_{ij}\,\ddot{\bar{q}}_i\,\dot{q}_j + a_{ij}\,\dot{\bar{q}}_i\,\ddot{q}_j + \frac{\partial u^*}{\partial q_j}\,\dot{q}_j + \frac{\partial u^*}{\partial \bar{q}_i}\,\dot{\bar{q}}_i =$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{q}_i}\right] + \frac{\partial u}{\partial q_i}\right]\dot{\bar{q}}_i + \left[\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \bar{\mathrm{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j}\right] + \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_j}\right]\dot{q}_j$$

En virtud de las leyes de evolución, el primer paréntesis es igual a:

$$-\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{q}_i}\,\dot{\bar{q}}_i = -\,b_{ij}\,\dot{\bar{q}}_i\,\dot{q}_j$$

El segundo paréntesis a:

$$\frac{\partial \bar{\mathrm{R}}}{\partial \dot{\bar{q}}_j}\,\dot{q}_j = b_{ij}\,\dot{\bar{q}}_i\,\dot{q}_j$$

Lo que implica

$$\frac{d\mathrm{H}^*}{dt} = 0 \iff \mathrm{H}^* = \text{constante de evolución.}$$

BIBLIOGRAFIA

1. CLAUDE GODBILLON: *Geométrie Differentielle et Mécanique Analytique*, Herman, 1969.
2. D. TER. HAAR: *Elements of Hamiltonian Mechanics*, Pergamon Press, 1971.
3. F. GANTMACHER: *Lectures in Analytical Mechanics*, Mir Publishers. Moscow, 1970.
4. J. W. LEECH: *Mecánica clásica*. Uteha, 1968.
5. COURANT-HILBERT: *Methods of Mathematical Physics*, Publishers. INC. New York, 1953.