CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ NO CUADRADA

por

CARMEN MARIA FERNANDEZ ASENSIO

Sea $M_{m \times n}$ el conjunto de las matrices de m filas y n columnas.
Sea $A \in M_{m \times n}$.

DEFINICIÓN 1. Si existe $X_d \in M_{n \times m}$ tal que $A \cdot X_d = I$ siendo I la identidad en $M_{m \times m}$, diremos que A admite matriz inversa por la derecha.

DEFINICIÓN 2. Si existe $X_i \in M_{n \times m}$, tal que $X_i \cdot A = I'$ siendo I′ la identidad en $M_{n \times n}$, diremos que A admite matriz inversa por la izquierda.

En el presente trabajo nos proponemos dar condiciones necesarias y suficientes para que una matriz no cuadrada posea inversa por la derecha o por la izquierda.

Sea $A \in M_{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Supongamos $m < n$.

1. EXISTENCIA DE INVERSA POR LA DERECHA

Si existiera la matriz X_d tal que $A \cdot X_d = I$, esto implicaría que los m sistemas lineales

$$x_j A = \delta_j \qquad j = 1 \dots m$$

fuesen compatibles.

Donde $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{nj})$ es la columna j-ésima de la matriz X_d, y $\delta_j = (0 \dots 1 \dots 0)$. Donde el 1 ocupa el lugar j-ésimo.

Por tanto, la existencia de matriz inversa por la derecha se reduce al estudio de la compatibilidad o incompatibilidad de los m sistemas anteriores.

PROPOSICIÓN 1. *Los* m *sistemas dados poseen solución* $\Longleftrightarrow$ $r(A) = m$.

Demostración:

Supongamos $r(A) = m \Rightarrow$ como las matrices B_j (matrices ampliadas de los m sistemas) tienen m filas $\Leftrightarrow r(B_j) = m \; \forall j = 1 \ldots m \Leftrightarrow$ los sistemas son todos compatibles.

Como, además, $m < n$ existen infinitas matrices X_d, tal que $A \cdot X_d = I$.

Reciprocamente

Por reducción al absurdo

$$r(A) = K < m \quad \text{y} \quad r(B_j) = K \quad \forall j = 1 \ldots m$$

Si $r(A) = K$ en la matriz A hay K vectores $a^l = (a_{1l} \ldots a_{ml})$ linealmente independientes.

Sean $a^l{}_1 \ldots a^l{}_k$.

Por ser $r(B_j) = k \quad \forall j = 1 \ldots m$ los m vectores δ_j, $j = 1 \ldots m$, dependen linealmente de $a^l{}_1 \ldots a^l{}_k$. Pero como $\{\delta_j\}_{,j=1 \ldots m}$ forman base de $R^m \Rightarrow a^l{}_1 \ldots a^l{}_k$ formaría base de R^m. Contradicción.

2. Existencia de inversa por la izquierda

Si existiera X_i, tal que $X_i A = I'$, esto implicaría que los n sistemas lineales

$$x_j A = \delta_j \qquad j = 1 \ldots n$$

fuesen compatibles.

Donde x_j es la fila j-ésima de X_i

$$x_j = (x_{jl} \ldots x_{jm}) \quad \text{y} \quad \delta_j = (0 \ldots 1 \ldots 0)$$

donde el 1 ocupa el lugar j-ésimo.

Proposición 2. *Al menos uno de los* n *sistemas es incompatible.*

Demostración: Análoga a la segunda parte de la Proposición 1.

Para estudiar el caso $m > n$ bastaría considerar la matriz transpuesta y estaríamos en el caso anterior.

Teorema 1. *La condición necesaria y suficiente para que una matriz no cuadrada admita inversa por la derecha o por la izquierda, es que su rango sea máximo.*

Además, en este caso se verifica que si el número de filas es menor que el de columnas, entonces sólo admite inversa por la derecha y no es única; y si el número de filas es mayor que el de columnas entonces sólo admite inversa por la izquierda, y no es única.

De todo esto se deduce el siguiente Teorema:

Teorema 2. La condición necesaria y suficiente para que una matriz posea inversa por la derecha y por la izquierda, es que sea cuadrada y de rango máximo.