RESOLUCION DE UNA CONJETURA SOBRE LA FORMULA

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^j = 0 \quad n > j \geqslant 0$$

por

F. JAVIER ERICE RODRIGUEZ

Considerando la aplicación

$$f\colon Z^+ \, x(Z^+ \; U \; \{0\}) \longrightarrow Z$$

dada por

$$(a \;\; b) \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{a}{i} i^b$$

el conjunto

$$F = \{(a, b) \in Z^+ \, x(Z^+ \; U \; \{0\});\; a > b\}$$

está contenido en Ker f

$$F \subset \mathrm{Ker}\, f.$$

La demostración aritmética de esta afirmación, apareció en *Gaceta Matemática* (*, ver Bibliografía), acompañada por la conjetura

$$F = \mathrm{Ker}\, f$$

advirtiéndose que el caso particular $b = 1$, estaba resuelto por V. A. Krechmar (1950).

La presente nota pretende demostrar que, efectivamente, dicha conjetura es cierta, dando una demostración de $F \subset \mathrm{Ker}\, f$, distinta de la aparecida en (*), mostrando el mismo razonamiento el camino recíproco, $\mathrm{Ker}\, f \subset F$, con lo que queda favorablemente resuelta. En efecto, basta considerar el desarrollo binomial de la función $(e^t - 1)^n$, dándole después a la variable t el valor particular $t = 0$.

$$(e^t - 1)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} e^{(n-i)t} \qquad [1]$$

que para $t = 0$ resulta

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0 \qquad [2]$$

Derivando respecto a t en ambos miembros de [1]

$$n(e^t - 1)^{n-1} e^t = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)\, e^{(n-i)t} \qquad [3]$$

Para $t = 0$ obtenemos

$$0 = n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, i \binom{n}{i}$$

que, después de utilizar [2], nos queda

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, i \binom{n}{i} = 0 \qquad [4]$$

Derivando [3] en el punto $t = 0$, y usando [2] y [4], obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, i^2 \binom{n}{i} = 0 \qquad [5]$$

y este método es prolongable, de forma que el exponente de i recorra todo el conjunto Z+, dado que la función $(e^t - 1)^n$ es indefinidamente derivable, obteniéndose el valor de

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, i^j \binom{n}{i}$$

en función de

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, i^k \binom{n}{i}$$

para $k < j$, es decir, en función de sus anteriores previamente calculadas.

Como se observará, el caso de exponentes 0,1,2, han dado como valor de la sumatoria el cero. La conjetura en realidad pregunta hasta qué exponente sucede precisamente esto.

La respuesta como condición necesaria y suficiente, viene de observar el comportamiento de las derivadas sucesivas de la función $(e^t - 1)^n$ en el punto $t = 0$. Desde luego

$$\frac{d^j}{dt^j} (e^t - 1)^n$$

para $t = 0$ es nula si $j < n$, pues siempre aparece como factor $(e^t - 1)^{n-j}$, que se anula para $t = 0$. La función que multiplica a dicho factor es creciente y positiva para $t \geqslant 0$, y haciendo excepción del coeficiente que acompaña a $(e^t - 1)^{n-j}$, (a saber, $n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-j-1)e^{jt}$), toma precisamente el valor cero en el punto $t = 0$, ya que se puede expresar como producto donde un factor es $(e^t - 1)^{n-j+1}$, luego la primera j de $Z+$, tal que

$$\frac{d^j}{dt^j} (e^t - 1)^n$$

no posee el factor $(e^t - 1)^{n-j}$, es precisamente cuando $j = n$, que aparecerá como

$$n! + (e^t - 1)\, g(t) \text{ con } g(t) > 0 \text{ para } t \geqslant 0 \qquad [6]$$

luego para $j = n$

$$(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, i^n \binom{n}{i} = n! \qquad [7]$$

es decir, la condición necesaria y suficiente para que

$$\sum_{i=0}^{a} (-1)^i \, i^b \binom{a}{i} = 0 \text{ con } a, b \in Z+$$

es que $a > b$, y para que

$$(-1)^a \sum_{i=0}^{a} (-1)^i \, i^b \binom{a}{i} > 0 \text{ con } a, b \in Z+$$

es que $a \leqslant b$.

La conjetura F = Ker f es, pues, efectivamente, cierta.

BIBLIOGRAFIA

(*) ALFREDO PÉREZ DE VARGAS y MARIANO QUIRÓS: «Una fórmula de interés en Física de Partículas», *Gaceta Matemática*, primera serie, tomo XXVI, 19-21, 1974.