DEPENDENCIA LINEAL EN ESPACIOS AFINES

por

VALERIANO ZORIO BLANCO

NOTA.—En el presente trabajo se da una justificación de la definición de dependencia e independencia lineal en espacios afines abstractos, basándose en la geometría elemental.

1. DEPENDENCIA LINEAL EN EL PLANO AFÍN

En el plano afín, las únicas variedades lineales que existen son los puntos (variedades de dimensión cero) y las rectas (variedades de dimensión uno).

La dependencia e independencia lineal esta en relación con estos conceptos.

Podemos definir la dependencia lineal del siguiente modo:

Un punto A depende linealmente de un conjunto de puntos $(A_1\ A_2 \dots \dots A_n)$, si los puntos $(A_1\ A_2 \dots A_n)$ definen una variedad lineal (estricta o superabundantemente) a la cual pertenece A.

En el caso del plano vamos a estudiar los dos únicos tipos de variedades lineales que existen.

1.º Variedades lineales de dimensión cero o puntos.

Estas variedades están formadas por un punto único, A_1, luego cualquier punto A, para que dependa linealmente de A_1, ha de coincidir con él, puesto que ha de pertenecer a la variedad definida por A_1 que es el mismo A_1.

2.º Variedades lineales de dimensión uno o rectas.

Una recta viene definida por dos puntos (A_1, A_2), de modo que un punto A depende linealmente del conjunto de puntos (A_1, A_2) si pertenece a la recta A_1, A_2.

Aunque para definir una recta basta con dos puntos, se puede considerar un conjunto cualquiera de n puntos de la recta $(A_1\ A_2 \dots \dots A_n)$, en cuyo caso decimos que definen la recta superabundantemente. El punto A depende linealmente de $(A_1\ A_2 \dots A_n)$ si pertenece a la recta definida por los n puntos.

Sabemos que si en el plano afin fijamos un punto origen O, se puede establecer una biyección entre los puntos del plano afin y los vectores libres de V_2.

$$\Pi_0 \longrightarrow V_2$$

$$A \longrightarrow \{\overrightarrow{OA}\}$$

Cuando entre dos conjuntos se establece una biyección se pueden identificar los conjuntos considerando iguales los elementos que se corresponden en la biyección (ejemplos de esta identificación los hemos visto entre los números reales y los puntos de una recta; o entre los números complejos y los puntos de un plano). Así, podemos identificar cada punto del plano afín con el vector del plano vectorial que le corresponde

$$A \equiv \{\overrightarrow{OA}\},\ B \equiv \{\overrightarrow{OB}\},\ C \equiv \{\overrightarrow{OC}\},\ \text{etc.}$$

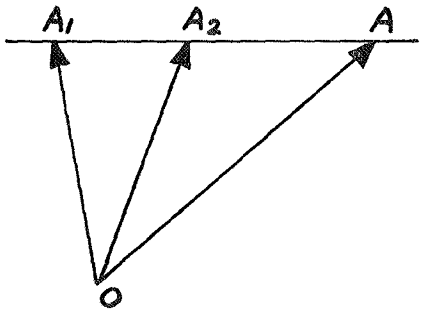
Si A depende linealmente de $(A_1\ A_2)$, resulta que A pertenece a la recta $A_1\ A_2$, luego

$$\{\overrightarrow{OA}\} = \{\overrightarrow{OA_1}\} + \lambda\{\overrightarrow{A_1\,A_2}\} = \{\overrightarrow{OA_1}\} + \lambda\,[\{\overrightarrow{OA_2}\} - \{\overrightarrow{OA_1}\}] =$$

$$= (1 - \lambda)\{\overrightarrow{OA_1}\} + \lambda\{\overrightarrow{OA_2}\}$$

o bien

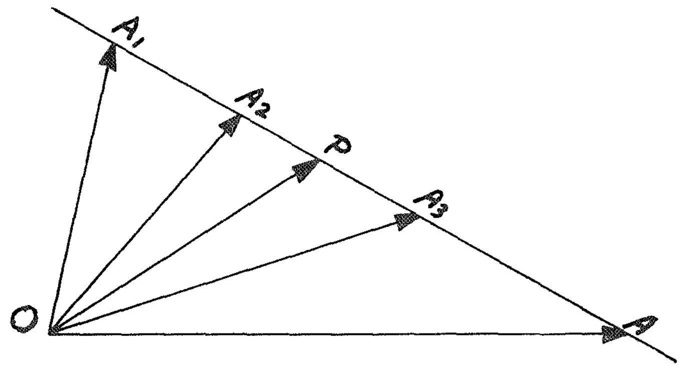
$$\{\overrightarrow{OA}\} = \mu\{\overrightarrow{OA_1}\} + \lambda\{\overrightarrow{OA_2}\},\ \mu + \lambda = 1$$



Debido a la identificación de cada punto con su vector, podemos escribir

$$A = \mu A_1 + \lambda A_2,\ \mu + \lambda = 1$$

Vamos a suponer, ahora, tres puntos alineados (A_1 A_2 A_3). A depende linealmente de (A_1 A_2 A_3) si pertenece a la misma recta.



Sea P un punto de la recta. distinto de los anteriores. Como A pertenece a la recta A_1 P será $A = \lambda A_1 + \mu P$, $\lambda + \mu = 1$, pero como P pertenece a la recta A_2A_3 será

$$P = \lambda' A_2 + \lambda'' A_3, \ \lambda' + \lambda'' = 1$$

Sustituyendo en

$$A = \lambda A_1 + \mu P = \lambda A_1 + \mu(\lambda' A_2 + \lambda'' A_3) = \lambda A_1 + \mu \lambda' A_2 + \mu \lambda'' A_3$$

tal que

$$\lambda + \mu \lambda' + \mu \lambda'' = \lambda + \mu (\underbrace{\lambda' + \lambda''}_{1''}) = \lambda + \mu = 1$$

O sea que hemos visto que «A depende linealmente de (A_1 A_2 A_3)» es equivalente a que

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3, \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

(Para demostrar el recíproco habría que desandar los pasos, por lo cual no lo hacemos.)

En general, repitiendo el proceso, se demuestra que "A depende linealmente de (A_1 A_2 . . . A_n) equivale a $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

2. Dependencia lineal en el espacio afin de dimension tres

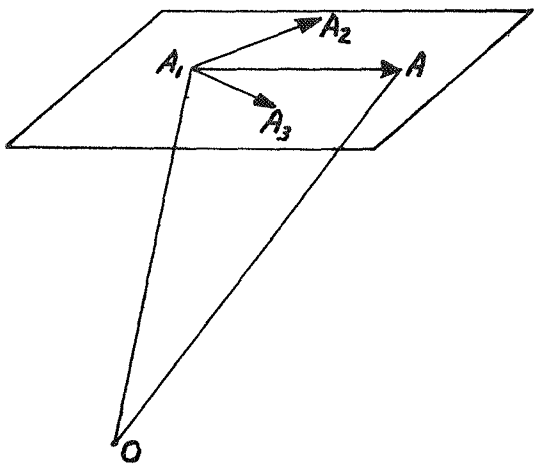
Aquí se han de considerar tres tipos de variedades lineales: puntos, rectas y planos.

Para los puntos y rectas vale todo lo del apartado anterior. Vamos a estudiar los planos. Un plano viene determinado por tres puntos no alineados (A_1 A_2 A_3). Se dice que A depende linealmente del conjunto de los tres puntos no alineados (A_1 A_2 A_3) si pertenece al plano definido por ellos, en cuyo caso

$$\{\overrightarrow{OA}\} = \{\overrightarrow{OA_1}\} + \lambda \{\overrightarrow{A_1A_2}\} + \mu \{\overrightarrow{A_1A_3}\} = \{\overrightarrow{OA_1}\} +$$

$$+ \lambda [\{\overrightarrow{OA_2}\} - \{\overrightarrow{OA_1}\}] + \mu [\{\overrightarrow{OA_3}\} - \{\overrightarrow{OA_1}\}] =$$

$$= (1 - \lambda - \mu) \{\overrightarrow{OA_1}\} + \lambda \{\overrightarrow{OA_2}\} + \mu \{\overrightarrow{OA_3}\}$$



o bien

$$\{\overrightarrow{OA}\} = \nu \{\overrightarrow{OA_1}\} + \mu \{\overrightarrow{OA_2}\} + \mu \{\overrightarrow{OA_3}\}$$

$$\nu + \lambda + \mu = 1$$

En virtud de la identificación de cada punto, con su vector debido a la biyección φ,

$$E_0 \longrightarrow V_3$$

$$A \longrightarrow \{\overrightarrow{OA}\}$$

podemos escribir

$$A = \nu A_1 + \lambda A_2 + \mu A_3, \; \nu + \lambda + \mu = 1$$

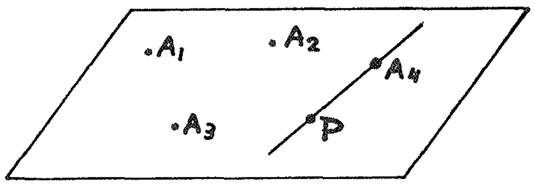
Vamos a suponer ahora que en el mismo plano definido por $(A_1\ A_2\ A_3)$ añadimos un cuarto punto A_4; en este caso también se sigue diciendo que A depende linealmente de los cuatro puntos $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$, pues pertenece al plano definido (superabundantemente) por $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$.

Sea P un punto del plano perteneciente a la recta $A_4\ A$. El punto A depende linealmente de (A_4, P), pues pertenece a la recta $A_4\ P$, luego

$$A = \lambda\, A_4 + \mu\, P,\ \lambda + \mu = 1$$

A su vez, el punto P depende linealmente de los puntos $(A_1\ A_2\ A_3)$ y, por lo tanto,

$$P = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$



Sustituyendo en la anterior expresión de A

$$A = \lambda\, A_4 + \mu\,(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3) = \lambda\, A_4 + (\mu\,\lambda_1)\, A_1 + (\mu\,\lambda_3)\, A_2 + $$
$$+ (\mu\,\lambda_3)\, A_3\ ,\ \text{tal que}\ \lambda + \mu\,\lambda_1 + \mu\,\lambda_2 + \mu\,\lambda_3 = \lambda + \mu\,\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{1''} =$$
$$= \lambda + \mu = 1$$

luego llegamos a la conclusión de que si A depende linealmente de $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$ resulta

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 \qquad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$$

Se verifica la equivalencia demostrando el recíproco en sentido contrario.

Si repetimos el proceso se demuestra que si A depende linealmente de $(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n)$ esto equivale a que

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + A_n \lambda_n$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

3. Dependencia lineal en espacios de dimensión $\geqslant 4$

Si consideramos un espacio de cuatro dimensiones, las variedades lineales serían: puntos, rectas, planos e hiperplanos de dimensión tres.

Para las tres primeras variedades vale lo anterior.

Un hiperplano de dimensión tres sería el espacio afín ordinario y está definido estrictamente por cuatro puntos no coplanarios $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$.

Decimos que un punto A del espacio de cuatro dimensiones depende linealmente del conjunto de puntos $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$, si pertenece a la variedad lineal de dimensión tres definida por ellos. Ya no podemos obtener una representación física, pero admitimos que si A depende linealmente de $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4)$ se verifica que $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$, $1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$ y, en general, para n puntos que definan superabundantemente la variedad lineal de dimensión tres se verifica para todo A que pertenezca a la misma.

$$A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n, \quad 1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$$

De una manera más general, en un espacio afın de dimensión m cualquiera, se dice que un punto A depende linealmente de un conjunto de n puntos $(A_1\ A_2 \ldots A_n)$ si se verifica $A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$, $1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Podríamos decir que los puntos $(A_1 \ldots A_n)$ pertenecen a una variedad lineal, y que el punto A pertenece a la misma; pero como en un espacio afın de dimensión mayor o igual a cuatro no podemos razonar con representaciones geométricas, hemos de atenernos a la definición indicada más arriba, que resulta lógica como generalización de los casos elementales que hemos estudiado con detalle.

4. Definición de variedad lineal

Vamos a recordar otras definiciones.

Definición.—Se dice que $(A_1\ A_2 \ldots A_n)$ son linealmente dependientes, si uno de ellos depende linealmente de los restantes.

Consecuencia de esta definición:

La condición necesaria y suficiente para que $(A_1\ A_2 \ldots A_n)$ sean linealmente dependientes, es que existan números reales $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n = O \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = O$$

Definición.—Se dice que n puntos $(A_1\ A_2 \ldots A_n)$ son linealmente independientes cuando ninguno de ellos depende linealmente de los restantes.

La condición necesaria y suficiente para que n puntos $(A_1\ A_2 \ldots A_n)$ sean linealmente independientes es que

$$\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n = O, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = O \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = O$$

Con estas definiciones y todo lo que hemos visto desde el comienzo, resulta que

1.º En una recta el máximo número de puntos linealmente independientes es dos, pues dados tres puntos, siempre uno de ellos depende de los otros dos. Recordemos que a la recta la hemos llamado variedad lineal de dimensión uno.

2.º En un plano el número máximo de puntos linealmente independientes es tres, pues dados cuatro puntos coplanarios, siempre uno de ellos depende linealmente de los restantes. Recordemos que al plano le hemos llamado variedad lineal de dimensión dos.

Estamos ya en condiciones de establecer una definición formal de «variedad lineal de dimensión n».

Definición.—Si $(A_1\ A_2 \ldots A_{n+1})$ son $n + 1$ puntos linealmente independientes, se llama *variedad lineal de dimensión n* al conjunto de puntos A

$$\{A/A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_{n+1} A_{n+1},\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1\}$$

La recta será

$$\{A/A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$$

siendo $(A_1\ A_2)$ linealmente independientes, o sea es una variedad lineal de dimensión uno, consistente con la definición general. El plano es

$$\{A/A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

siendo $(A_1\ A_2\ A_3)$ linealmente independientes, o sea es una variedad lineal de dimensión dos, también consistente con la definición general.