DEMOSTRACION DE UNA CONJETURA SOBRE LA FORMULA

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k.$$

por

TOMAS J. RECIO MUÑIZ

En el artículo «Una fórmula de interés en Física de Partículas» (*) se demuestra que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k = 0 \ , \ n > k \geqslant 0 \ ,$$

conjeturándose que dicha fórmula no es válida si $k \geqslant n > 0$. La demostración de esta conjetura en el contexto de la Aritmética es el fin de la presente nota.

Siguiendo la nomenclatura del citado artículo, denotaremos

$$f(n, k) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} i^k, \quad \begin{matrix} n \in Z_+ \\ k \in Z_+ \cup \{0\} \end{matrix},$$

obteniéndose la siguiente igualdad:

$$f(n, k+1) = n\,(f(n, k) - f(n-1, k))\ , \ \begin{matrix} n \in Z_+ - \{1\} \\ k \in Z_+ \cup \{0\} \end{matrix}, \qquad [1]$$

cuya demostración puede allí verse.

(*) A. PEREZ DE VARGAS y M. QUIROS: «Una fórmula de interés en Física de Partículas». *Gaceta Matemática*, 1 y 2. Madrid, 1974.

Si $n \in Z_+ - \{1\}$, $k \in Z_+$, podemos entonces escribir

$$f(n, k+1) = n(f(n, k) - f(n-1, k))$$
$$f(n, k) = n(f(n, k-1) - f(n-1, k-1))$$

y, por tanto,

$$f(n, k+1) - f(n, k) = n[f(n, k) - f(n, k-1) - [f(n-1, k) - f(n-1, k-1)]],.$$

o más brevemente

$$\Delta(n, k+1) = n(\Delta(n, k) - \Delta(n-1, k)), \qquad [2]$$

denotando

$$\Delta(n, k) = f(n, k) - f(n, k-1)$$

Lema:

Para $n_0 \in Z_+$ y par, $f(n_0, k)$ es una función de $k \in Z_+ \cup \{0\}$, que toma valores positivos o cero, y creciente. Si $n_0 \in Z_+$ es impar, $f(n_0, k)$ toma valores negativos o cero y es decreciente.

Demostración:

Puede comprobarse trivialmente que

$$f(1, 0) = 0$$
$$f(1, k) = -1, k \geqslant 1$$

y, por tanto, el lema se verifica para $n_0 = 1$. Supongamos que el lema se verifica para n_0 impar. Veamos que entonces se verifica para $n_0 + 1$; basta para ello demostrar que

$$\Delta(n_0 + 1, k) \geqslant 0, k \in Z_+,$$

lo que resulta por inducción en k, dado que en [2]

$$\Delta(n_0, k)$$

es negativo.

Si suponemos que n_0 es par, el lema se demostraría análogamente.

Corolario:

Si $k \geqslant n > 0$, $f(n, k) \neq 0$.

Demostración:

Basta demostrar que $f(k, k) \neq 0$, $\forall k \in Z_+$ lo que se sigue por inducción en k, usando [1] en la forma

$$k \in Z_+ - \{1\}, f(k, k) = k(f(k, k-1) - f(k-1, k-1)) = -k f(k-1, k-1).$$

Instituto «Jorge Juan»