SOBRE LA CORRECCION DE UN PROBLEMA

por

A. PEREZ GOMEZ Y F LOPEZ FERNANDEZ-ASENJO

En la revista *The American Mathematical Monthly*, volumen 71, número 8, figura el siguiente problema:

Dar un ejemplo de un espacio topologico finito X, *y de un subconjunto* $A \subset X$, *tal que* A, A' *(conjunto derivado de* A*)*, A'', ... A^k, *sean diferentes y ninguno de ellos sea cerrado.* La solución que allí se dá es la siguiente:

Sea $X = \{0, 1, 2, \ldots k + 1\}$, se considera la topologia T sobre X; cuyos abiertos son: X, $\emptyset$ y los conjuntos $\{1, 2, \ldots j / j \leqslant k + 1\}$. Sea $A = \{1, 2, \ldots k + 1\}$. Dicho conjunto no cumple las condiciones impuestas por el enunciado, pues $A' = \{0, 2, \ldots, k + 1\}$ es cerrado, ya que $\{1\}$ es abierto.

Nosotros resolvemos el problema dando el siguiente ejemplo:

Sea $X = \{0, 1, 2, \ldots, n, n + 1, n + 2, h\}$ con $n > k$. Vamos a dar una estructura topológica sobre X, dando el filtro $B(x)$ de los entornos de cada punto $x \in X$:

$B(0) = X$
$B(1) = \{A \subset X$, tales que $\{1\} \subset A\}$
$B(2) = \{A \subset X$, tales que $\{1, 2\} \subset A\}$
....
$B(n) = \{A \subset X$, tales que $\{1, 2, \ldots, n\} \subset A\}$
$B(n + 1) = \{A \subset X$ tales, que $\{n + 1, h\} \subset A\}$
$B(n + 2) = \{A \subset X$, tales que $\{n + 1, n + 2, h\} \subset A\}$
$B(h) = B(n + 1)$

Evidentemente, se verifican los axiomas V_1, V_2, V_3 (Bourbaki-Topologia general), para la introducción de una topologia por entornos. Veamos que también se verifica V_4.

a) Sea $V \in B(0)$. $V = X$ y $X \in B(x)$ $\forall x \in X$.

b) Sea $k \in N$, $1 \leqslant k \leqslant n$ y sea $V \in B(k)$. Sea $W = \{1, 2, \ldots, k\}$. $W \subset V$ y $W \in B(k)$; $V \in B(y)$ $\forall y \in W$.

c) Sea V ε $B(n+1)$. Sea W $= \{n+1, h\}$. W $\subset$ V y W ε $B(n+1)$; V ε $B(y)$ para y ε W, es decir, $y = n+1$ o $y = h$.

El mismo ejemplo vale para h.

d) Sea V ε $B(n+2)$ y W $= \{n+1, n+2, h\}$. W $\subset$ V y W ε $B(n+2)$; V ε $B(y)$ $\forall$ y ε W.

Por tanto $\forall x$ ε X, $B(x)$ es el filtro de los entornos de x para una topología sobre X para la cual los abiertos son los conjuntos A, tales que A ε $B(x)$ $\forall x$ ε A.

Sea A $= \{1, 2, \ldots, n, n+2, h\}$

A no es cerrado, pues CA $= \{0, n+1\}$ no es abierto, ya que no es entorno de $n+1$.

A′ $= \{0, 2, \ldots, n, n+1, n+2\}$

A′ no es cerrado, pues A′ $= \{1, h\}$ no es abierto por no ser entorno de h.

A″ $= \{0, 3, \ldots, n, n+2, h\}$.

A″ no es cerrado, pues A′ $= \{1, 2, n+1\}$ no es entorno de $n+1$.

Finalmente, $A^{k)} = \{0, k+1, \ldots, n, n+2, h\}$, o bien $A^{k)} = \{0, k+1, n, n+1, n+2\}$ y $A^{k)}$ no es cerrado.

Evidentemente, todos los conjuntos A, A′, A″, ... , $A^{k)}$ son diferentes.

Dpto. Matemáticas
Universidad de Valladolid