NUMERO DE PARTICIONES DE UN CONJUNTO FINITO DE CARDINAL CUALQUIERA

por

JESUS GOMEZ SANCHEZ

INTRODUCCIÓN

En esta misma Revista, en el artículo «Estructuras Algebraicas de las Fracciones», del Dr. don Norberto Cuesta Dutari (*Gaceta Matemática*, números 3 y 4 de 1963), fue propuesta la cuestión de determinar el número de particiones de un conjunto, en particular, finito.

En un número posterior de la Revista, don Julio García Pradillo, en el artículo «Clasificaciones en conjuntos finitos», expone su solución al citado problema (*Gaceta matemática*, núms. 1 y 2 de 1968); mediante un cálculo de diferencias finitas, de las potencias de exponente, el cardinal del conjunto, de varios números naturales consecutivos; vinculado al número de las clases, de una clasificación genérica.

Habiendo examinado los dos artículos mencionados, hemos logrado obtener, desde otro punto de vista y con otro procedimiento, relativo a los Cardinales de Clase de la Partición genérica, de un conjunto finito cualquiera, el número de sus Particiones, que juzgamos conveniente dar a conocer.

EJEMPLO PREVIO

Antes de exponer las conclusiones generales, vamos a sugerirlas en un conjunto de cardinal 5.

Sea el conjunto de distintos elementos $\{a, b, c, d, e\}$, agrupemos sus distintas particiones de modo tal, que tengan las clases de la partición los mismos cardinales, que denominaremos brevemente Cardinales de Clase.

Los distintos tipos de particiones que pueden presentarse, atendiendo a los Cardinales de Clase posibles, son los siguientes:

$\{a, b, c, d, e\}$	con Cardinales de Clase	$5 = 1 \cdot 5$
$\{a, b, c, d\} \cup \{e\}$	»	$5 = 4+1$
$\{a, b, c\} \cup \{d, e\}$	»	$5 = 3+2$
$\{a, b, c\} \cup \{d\} \cup \{e\}$	»	$5 = 3+1+1$
$\{a, b\} \cup \{c, d\} \cup \{e\}$	»	$5 = 2+2+1$
$\{a, b\} \cup \{c\} \cup \{d\} \cup \{e\}$	»	$5 = 2+1+1+1$
$\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\} \cup \{e\}$	»	$5 = 1+1+1+1+1$

Ahora bien, el número de particiones de un conjunto de cardinal 5, cuyo cardinal de clase es 5, es, evidentemente, 1.

El número de particiones con cardinales de clase (4,1) es

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{1}{1} = \frac{5!}{4!\ 1!} = 5$$

El número de particiones con cardinales de clase (3,2) es

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$$

El número de particiones con cardinales de clase (3,1,1) es

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \frac{1}{2!} = \frac{5!}{3!\ 1!^2} \cdot \frac{1}{2!} = 10$$

El número de particiones con cardinales de clase (2,2,1) es

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} \frac{1}{2!} = \frac{5!}{2!^2\ 1!} \quad \frac{1}{2!} = 15$$

El número de particiones con cardinales de clase (2,1,1,1) es

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \frac{1}{3!} = \frac{5!}{2!\ 1!^3} \quad \frac{1}{3!} = 10$$

El número de particiones con cardinales de clase (1,1,1,1,1) es

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} \frac{1}{5!} = \frac{5!}{1!^5} \quad \frac{1}{5!} = 1$$

Finalmente, el número total de particiones de un conjunto de cardinal 5 es, pues, el siguiente, P_5, así denotado

$$P_5 = \frac{5!}{5!} + \frac{5!}{4!\ 1!} + \frac{5!}{3!\ 2!} + \frac{5!}{3!\ 1!^2} \frac{1}{2!} +$$

$$+ \frac{5!}{2!^2\ 1!} \frac{1}{2!} + \frac{5!}{2!\ 1!^3} \frac{1}{3!} + \frac{5!}{1!^5} \frac{1}{5!} = 52$$

NÚMERO DE PARTICIONES DE UN CONJUNTO FINITO DE CARDINAL n

Sea n el cardinal de un conjunto finito y $n_1, n_2, \ldots, n_r$ los cardinales de clase respectivos de una partición genérica, siendo, pues,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n \quad , \quad n_1 \cdot n_2 \ldots n_r \neq 0$$

Las particiones, tales que la 1.ª clase tiene n_1 elementos, la 2.ª clase tiene n_2 elementos, ..., la clase r^a, n_r elementos; de modo que son algo más que particiones: Son particiones ordenadas; tienen un cardinal, cuyo valor es

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n_2 + n_3 + \ldots + n_r}{n_2} \ldots \binom{n_{r-1} + n_r}{n_{r-1}} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

Pero nosotros requerimos una fórmula, que nos dé las particiones naturales (sin orden las clases) de un conjunto finito; por ello, la fórmula de más arriba no es satisfactoria, pues se refiere a las particiones, ordenadas en clases, referidas a los cardinales de clase.

Ahora bien, entre los cardinales

$$n_1 , n_2 , \ldots , n_r$$

(no nulos), vamos a agrupar los iguales entre sí, de donde se tendrá

$$c_1 n_1 + c_2 n_2 + \ldots + c_k n_k = n \ ; \ n_1 \cdot n_2 \ldots n_k \neq 0$$

Con lo cual, las particiones ordenadas, con estos cardinales de clase, tendrá un número de posibilidades

$$\frac{n!}{(n_1!)^{c_1} \ (n_2!)^{c_2} \ \ldots \ (n_k!)^{c_k}} \tag{1}$$

entre las cuales han sido, repetidamente, incluidas las particiones naturales. Aquellas particiones ordenadas que tienen los mismos elementos, en las clases equicardinales, aunque difieran en el orden de éstas, evidentemente realizan la misma partición natural.

Así, pues, de cada partición natural se obtienen las particiones ordenadas en las clases, que la realizan permutando, de todas las maneras posibles, las c_1 clases de cardinal n_1, entre sí; las c_2 clases de cardinal n_2, entre sí; ... ; las c_k clases de cardinal n_k, entre sí.

Como la permutación de dos o más clases, de distinto cardinal, no afecta a la partición natural y de la partición ordenada, en clases, se puede prescindir, sin más que colocar las clases por orden no creciente, de sus cardinales; se tiene, pues, con este convenio que el número de particiones naturales, provinientes de el de las ordenadas [1] son

$$\frac{n!}{(n_1!)^{c_1} \ (n_2!)^{c_2} \ \ldots \ (n_k!)^{c_k}} \cdot \frac{1}{c_1!\, c_2! \ldots c_k!} \tag{2}$$

y ahora ya podemos concluir, que el número de particiones (o clasificaciones), P_n, de un conjunto finito, de cardinal n, es

$$P_n = \sum \frac{n!}{(n_1!)^{c_1}(n_2!)^{c_2}\dots(n_k!)^{c_k}} \cdot \frac{1}{c_1!\,c_2!\dots c_k!} \qquad [3]$$

$$c_1 n_1 + c_2 n_2 + \dots + c_k n_k = n$$
$$n \geqslant n_1 > n_2 > \dots > n_k \geqslant 1$$

NÚMERO DE PARTICIONES PARA LOS PRIMEROS CARDINALES FINITOS

Vamos a comprobar la eficacia de la fórmula [3], en los casos

$$n = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$$

Para $n = 1$, evidentemente $P_1 = 1$.
Para $n = 2 = 1 + 1$,

$$P_2 = \frac{2!}{2!} + \frac{2!}{(1!)^2}\,\frac{1}{2!} = 1 + 1 = 2$$

Para $n = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$

$$P_3 = \frac{3!}{3!} + \frac{3!}{2!\,1!} + \frac{3!}{(1!)^3}\,\frac{1}{3!} = 1 + 3 + 1 = 5$$

Para

$$n = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

$$P_4 = \frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3!\,1!} + \frac{4!}{(2!)^2}\,\frac{1}{2!} + \frac{4!}{2!\,(1!)^2}\,\frac{1}{2!} + \frac{4!}{(1!)^4}\,\frac{1}{4!} = 15$$

Para

$$\begin{aligned} n &= 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 = 2 + 2 + 1 + 1 = \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_6 &= \frac{6!}{6!} + \frac{6!}{5!\,1!} + \frac{6!}{4!\,2!} + \frac{6!}{4!\,(1!)^2}\,\frac{1}{2!} + \frac{6!}{(3!)^2}\,\frac{1}{2!} + \frac{6!}{3!\,2!\,1!} + \\ &= \frac{6!}{3!\,(1!)^3}\,\frac{1}{3!} + \frac{6!}{(2!)^3}\,\frac{1}{3!} + \frac{6!}{(2!)^2\,(1!)^2}\,\frac{1}{2!\,2!} + \frac{6!}{2!\,(1!)^4}\,\frac{1}{4!} + \\ &+ \frac{6!}{(1!)^6}\,\frac{1}{6!} = 1.2 + 6 + 15.3 + 10 + 60 + 20 + 15 + 45 = 203 \end{aligned}$$

Para $n = 7$ se tiene, $P_7 = 877$; para $n = 8$, $P_8 = 4.140$; para $n = 9$, $P_9 = 21.147$.

Estos valores han sido dados por el señor García Pradillo, en el lugar citado ya.

Si $n > 9$, al hallar el número de particiones, P_n, para aplicar el cálculo de diferencias finitas a la sucesión finita

$$0^n,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n\ ,\ \ldots\ ,\ n^n$$

se requieren números de 11 cifras, si $n = 10$; de 12 cifras, si $n = 11$; de 13 cifras, si $n = 12$, etc., con los cuales ha de operarse. Empero, esta dificultad no se presenta en la fórmula [3], sino más bien, cada término, como cociente de factoriales, se simplifica notablemente, siendo su orden de magnitud decimal menor que el de P_n, y, además, existen términos repetidos o múltiplos, lo cual da lugar a nueva reducción. Aunque, por supuesto, el número de términos de [3] crece con n.

Así, por ejemplo, para $n = 10$ se tiene

$$P_{10} = 1.2 + 10 + 45.3 + 120.3 + 360 + 210.3 + 840 + 630.2 + 1260 + 126 + 1260 + 2520.4 + 3780 + 252 + 1575.2 + 2100.2 + 12600 + 4200 + 3150.2 + 9450 + 4725 + 3150 + 2800 + 12600.3 + 945 = \mathbf{109675}$$

Para $n = 11$ se obtiene

$$P_{11} = 1.2 + 11 + 55.3 + 165.3 + (165.3) + 330.3 + (330.4) + 990.2 + (990.2) + 462.3 + (462.5) + 4620.4 + 6930 + 1386 + (1386.5).4 + 4620.2 + (4620.6) + (4620.2) + 6930.2 + (6930.3) + 10395 + 5775.2 + (5775.3) + (5775.4) + (5775.2) + 17325.2 + (17325.2).3 + (17325.4) + 15400.2 + (15400.3) + 69300 = \mathbf{574620}$$

Y, como ejemplo final, demos el numero de particiones, cuando $n = 12$

$$P_{12} = 1.2 + 12 + 66.3 + 220.3 + (220.3) + 495.3 + (495.4) + 1485.2 + (1485.2) + 792.3 + (792.5) + 7920.4 + 11880 + 462 + (462.2) + (462.12) + 13860.4 + 9240.2 + (9240.6) + (9240.2) + 13860.2 + (13860.3) + 10395 + 8316.2 + (8316.2) + 27720.4 + (27720.3) + 55440 + (55440.3) + 83160.3 + 62370 + 5775 + (5775.3) + 69300 + 51975.3 + (51975.2)2 + 138600.3 + (138600.2) + 207900.2 + (207900.2) + 15400 + 61600 + (61600.3) + 138600 + (138600.2) + (138600.3) = \mathbf{4\,130\,437}$$

Una consecuencia aritmética

Como el número de particiones de un conjunto finito, de cardinal n, con cardinales de clase $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, hemos probado que es

$$\frac{(c_1n_1 + c_2n_2 + \ldots + c_kcn_k)!}{(n_1!)^{c_1}\ (n_2!)^{c_2}\ \ldots\ (n_k!)^{c_k}}\ \frac{1}{c_1!\, c_2! \ldots c_k!}$$

donde

$$c_1n_1 + c_2n_2 + \ldots + c_kn_k = n$$

es una cualquiera de las descomposiciones, en suma de enteros positivos, del cardinal n del conjunto dado; se deduce que dicho número de particiones es necesariamente natural: por tanto, queda probada, indirectamente, la relación

$$(c_1 n_1 + c_2 n_2 + \ldots + c_k n_k)!$$

es divisible por

$$(n_1!)^{c_1} (n_2!)^{c_2} \ldots (n_k!)^{c_k} \,.\, c_1!\, c_2! \ldots c_k!$$

caso particular de la cual, es el teorema de Weill, cuando $n = c_1 n_1$.