SOBRE LA SUMA DE DOS BICUADRADOS Y EL DOBLE DE UN BICUADRADO

por

Guillermo Muñoz Goyanes
Doctor Ingeniero de Montes

Hace ya muchos años, el profesor W. Rouse Ball, del Trinity College, de Cambridge, dio a conocer un original e interesante libro, en el que recogía curiosidades y problemas matemáticos de tiempos antiguos y modernos.

En la página 17 del primer tomo, de los tres en que la Librairie Scientifique A. Hermann (París, 1926) publicó la traducción de la cuarta edición inglesa de dicho libro, con el título *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*, se dice, como si fuera una cuestión fácilmente demostrable, que «la suma de dos bicuadrados nunca es igual al doble de un bicuadrado, a menos que sean iguales». Es decir, que $x^4 + y^4 = 2z^4$ solamente cuando $x = y = z$.

Sin embargo, los versados en matemáticas saben que tal teorema ha dado lugar a numerosos intentos de demostración, más o menos felices, algunos de ellos complicadísimos.

La que ofrecemos a continuación creemos es de las más sencillas; aunque tengamos que basarnos, para ello, en cinco cuestiones previas, como seguidamente se verá.

I. Problema de Fermat

Siendo x, y, z números naturales, tales que x e y son primos entre sí y x un número par, hallar la solución más general que resuelve, en números enteros y positivos, la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

Resolución.—Según el enunciado: $x > o$, $y > o$, $z > o$. m.c.d. $(x, y) = 1$, $x = 2K$.

Siendo x e y primos entre sí, el número y será impar. Por tanto: $x^2 =$ par, $y^2 =$ impar y $z^2 =$ impar. Además, m.c.d. $(y, z) = 1$, pues si

y y z tuvieran algún divisor común, también lo sería de $x^2 = y^2 - z^2$, lo cual no es posible, pues x e y son primos entre sí. Por tanto, los números

$$\frac{1}{2}(z + y) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(z - y)$$

son enteros, y

$$\text{m.c.d.}\left(\frac{z + y}{2}, \frac{z - y}{2}\right) = 1.$$

Ahora bien, $x^2 + y^2 = z^2$ puede escribirse en la forma:

$$\frac{x^2}{4} = \left(\frac{z + y}{2}\right) \cdot \left(\frac{z - y}{2}\right)$$

y siendo

$$\frac{z + y}{2} \quad \text{y} \quad \frac{z - y}{2}$$

primos entre sí, deberán ser

$$\frac{z + y}{2} = a^2 \quad \text{y} \quad \frac{z - y}{2} = b^2,$$

siendo $a > o$, $b > o$, $a > b$, m.c.d. $(a, b) = 1$ y $a^2 + b^2 = z$.

Por otra parte, como $a + b \equiv a^2 + b^2$ (mód. 2) y $z \equiv 1$ (mód. 2) (puesto que z es un número impar), resulta: $a + b \equiv z \equiv 1$ (mód. 2), luego $(a + b) - 1 = \dot{2}$; que nos dice que $a + b$ es impar. o sea que a y b son de distinta paridad.

Por tanto: siendo a y b de distinta paridad, primos entre sí y tales que $a > b > o$, la solución más general de la ecuación dada está representada por las fórmulas:

$$\boxed{x = 2ab,\ y = a^2 - b^2,\ z = a^2 + b^2}$$

deducidas de

$$\frac{x^2}{4} = a^2 \cdot b^2, \frac{z + y}{2} = a^2 \text{ y } \frac{z - y}{2} = b^2 .$$

Esta solución biparamétrica verifica, efectivamente, la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, puesto que

$$x^2 + y^2 = 4a^2 \cdot b^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 = z^2.$$

Se puede ver, recíprocamente, que tomando $x = 2ab$, $y = a^2 - b^2$ y $z = a^2 + b^2$, las incógnitas x e y tienen que ser números primos entre sí, siempre que m.c.d. $(a, b) = 1$.

En efecto: Si m.c.d. $(x, y) = \mathrm{D}$, resulta que z es divisible por D, es decir, $z = \dot{\mathrm{D}}$, y también $y = a^2 - b^2 = \dot{\mathrm{D}}$ y $z = a^2 + b^2 = \dot{\mathrm{D}}$; por tanto $2a^2 = \dot{\mathrm{D}}$ y $2b^2 = \dot{\mathrm{D}}$. Pero, siendo a y b primos entre sí, D tiene que ser 1 ó 2; más como y es impar, no puede ser $\mathrm{D} = 2$, luego será $\mathrm{D} = 1$, es decir, x e y primos entre sí, como se quería demostrar.

Finalmente obsérvese que, dados y y z, los valores de a^2 y b^2, y, por consiguiente, los de a y b, están perfectamente determinados; y que, a diferentes valores de x e y corresponden diferentes valores de a y b.

II. Teorema de Fermat

La ecuacıón $x^4 + y^4 = z^2$ no admite soluciones enteras, distintas de cero.

Demostración.—Utilizaremos el llamado «método de descenso» siguiente: Si una proposición $\mathrm{P}(n)$ es verdadera para algún entero positivo n, habrá evidentemente uno de tales enteros, que será el más pequeño. Ahora bien, si una proposición $\mathrm{P}(n)$ para algún entero positivo n implica $\mathrm{P}(n')$ para algún entero positivo n' más pequeño que n, no habría ninguno de tales enteros que fuese el más pequeño y la contradicción prueba que dicha proposición $\mathrm{P}(n)$ no puede ser verdadera para ningún entero positivo.

(Este método puede aplicarse a este teorema, ya que, siendo todos los exponentes pares, todo lo que se diga para los números positivos será valido para los negativos.)

Supongamos que n sea el menor número natural para el cual se verifica $x^4 + y^4 = n^2$. En este caso, m.c.d. $(x, y) = 1$, pues si x e y tuvieran un divisor común d, este también lo sería de n, y x^4 e y^4 serían divisibles por d^4, y, por tanto, también n^2, con lo cual se podrían dividir ambos miembros de la ecuación por d^4 y reemplazar n por un número menor, lo cual es contrario a la hipótesis de que n era el mínimo. Por consiguiente, por lo menos uno de los números x o y tiene que ser impar y $n^2 = x^4 + y^4 \equiv 1$, 2 ó 3 (mód. 4); pero $n^2 \equiv 2$ (mód. 4), es decir, $n^2 - 2 = \dot{4}$ es imposible (sea n par o impar), luego $n^2 = x^4 + y^4 \equiv 1$ ó 3 (mód. 4), lo que equivale a decir que n^2 y $x^4 + y^4$ son impares, o sea que uno de los números x o y es par. Si se supone que x es el par, se tendrá (según se ha visto en I): $x^2 = 2ab$, $y^2 = a^2 - b^2$, $n = a^2 + b^2$, $a > b > o$, m.c.d. $(a \cdot b) = 1$ y a y b de distinta paridad. Si a es par y b impar, resulta $y^2 \equiv -1$ (mód. 4) o $y^2 + 1 = \dot{4}$, lo cual es imposible, puesto que si $y = 2k + 1$, $a = 2p$ y $b = 2q + 1$, resultaría $(2k + 1)^2 = 4p^2 - (2q + 1)^2$ o sea $2 = \dot{4}$, que es falso. Por tanto, tiene que ser: $a =$ impar y $b =$ par, es decir, $b = 2c$. Se tendrá entonces:

$$x^2 = 4ac \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 = ac ,$$

y como a y c son primos entre sí (puesto que a y b lo son) deberá ser: $a = d^2$, $c = e^2$, $d > o$, $e > o$ y m.c.d. $(d, e) = 1$, siendo d impar (puesto que lo es a). Por tanto: $y^2 = a^2 - b^2 = d^4 - 4e^4$ o $(2e^2)^2 + y^2 = (d^2)^2$, en la cual $2e^2$ es un número par primo con y^2, luego se puede hacer $2e^2 = 2 . l . m$ y $d^2 = l^2 + m^2$, siendo $l > m > o$ y m.c.d. $(l \cdot m) = 1$ (según se ha visto en I). Pero siendo $e^2 = l \cdot m$ y l y m primos entre sí, será $l = r^2$ y $m = s^2 (r > o, s > o)$, luego $d^2 = r^4 + s^4$. Ahora bien: $d \leqslant d^2 = a \leqslant a^2 < a^2 + b^2 = n$, es decir, $d < n$, lo cual nos dice que n no es el mínimo valor que verifica a la ecuación $x^4 + y^4 = n^2$. Y esta contradicción proviene de haber supuesto que la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ admitía soluciones enteras.

III. Teorema

La ecuación $x^4 - y^4 = z^2$ no admite soluciones enteras, distintas de cero. (Se supone que $x > o$, $y > o$, $z > o$, ya que, siendo todos los exponentes pares, todo lo que se diga para los números positivos será válido para los negativos.)

Demostración: Empecemos por señalar que en la ecuación $x^4 - y^4 = z^2$ [1] sólo hay que considerar el caso en que m.c.d. $(x, y) = 1$, pues si x e y tuviesen un divisor común d, resultaría: $x = d \cdot \alpha$, $y = d \cdot \beta$, $x^4 - y^4 = d^4 \alpha^4 - d^4 \beta^4$, y si $x^4 - y^4$ fuese un cuadrado lo sería su igual $d^4 . (\alpha^4 - \beta^4)$ y, por tanto, $\alpha^4 - \beta^4$, donde α y β son primos entre sí, es decir, m.c.d. $(\alpha, \beta) = 1$.

Consideremos ahora todas las hipótesis posibles sobre las paridades de x e y:

Primer caso: $x =$ par, $y =$ impar. Se tendrá: $x^2 =$ par, $y^2 =$ impar, $x^2 = 2n$, $y^2 = 2n' + 1$ ($n > n'$, pues al ser $z > o$, será $x > y$), $x^4 = 4 n^2$, $y^4 = 4 n' (n' + 1) + 1$, $x^4 - y^4 = 4 \cdot [n^2 - n' (n' + 1)] - 1 = 4p - 1$, siendo $p = n^2 - n' (n' + 1)$ mayor que 1 (e incluso que 2) por ser $n > n'$; luego $p = 1 + q$, donde $q > o$ (e incluso $\geqslant 1$), luego $x^4 - y^4 = 4q + 3$, que no puede ser un cuadrado.

Segundo caso: $x =$ impar, $y =$ par. Se tendrá $x^2 =$ impar, $y^2 =$ par. Además, ya se ha dicho que puede suponerse en la ecuación [1] es m.c.d. $(x, y) = 1$, con lo que m.c.d. $(z, y) = 1$, pues si tuviesen z e y un divisor común, este divisor lo sería también de x y no sería m.c.d. $(x,y) = 1$.

La ecuación [1] puede escribirse:

$$(y^2)^2 + z^2 = (x^2)^2 \qquad [2]$$

siendo m.c.d. $(z, y) = 1$ e $y^2 =$ par (por hipótesis) y se tendría (según vimos en I)

$$y^2 = 2ab, \; z = a^2 - b^2, \; x^2 = a^2 + b^2 \qquad [3]$$

donde m.c.d. $(a, b) = 1$ y a y b de distinta paridad. Por tanto:

$$x^4 - y^4 = a^4 + b^4 - 2a^2 b^2 = (a^2 - b^2)^2 \qquad [4]$$

Pero en virtud de [3]: $a^2 + b^2 = x^2$, y m.c.d. $(a, b) = 1$, con lo que (teniendo de nuevo en cuenta las fórmulas obtenidas en I),

$$b = 2cd, \ a = c^2 - d^2, \ \text{m.c.d.}\ (c, d) = 1 \qquad [5]$$

es decir: $x^4 = a^2 + b^2 = (c^2 + d^2)^2$, o sea $x^2 = c^2 + d^2$ e $y^2 = 2ab = 4cd$ $(c^2 - d^2)$, luego $4cd\,(c^2 - d^2)$ debería ser un cuadrado, y también, por consiguiente,

$$cd\,(c^2 - d^2) \qquad [6]$$

Hagamos, pues,

$$c = e^2, \ d = f^2 \qquad [7]$$

con lo que $c^2 - d^2 = e^4 - f^4$, y como ya vimos que $c^2 - d^2$ tendría que ser un cuadrado, también lo sería

$$e^4 - f^4 \qquad [8]$$

es decir,

$$e^4 - f^4 = g^2 \qquad [9]$$

es decir, que si $x^4 - y^4$ fuese un cuadrado, también lo sería la expresión analoga [8], diferencia de dos bicuadrados.

Suponiendo que de tener solución [1] fuera α el menor valor de x para el que se verifica, y llamamos β y γ valores de y y z correspondientes al α de x que verifiquen a [1], se tendría, en virtud de [3]:

$$\beta^2 = 2ab, \ \gamma = a^2 - b^2, \ \alpha^2 = a^2 + b^2 \qquad [10]$$

de donde se deducen:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \qquad [11]$$

con cuyos valores se obtienen los de c y d de las fórmulas [5], que son

$$c^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a) \quad \text{y} \quad d^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a).$$

Pero según [7]

$$e^4 = c^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)$$

y en virtud de [10] y [11]

$$e^4 = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}).$$

Veamos ahora que $e^4 < \alpha$ [12], o sea que

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) < \alpha,$$

de donde se deduce

$$\sqrt{\alpha^4 - \beta^4} < \alpha^2 ,$$

lo cual es cierto. Y si se verifica [12] sería $e < \alpha$ (pues se trata de números enteros).

En resumen: si siendo α el menor valor de x que verifica [1], se ha probado que existiría un valor e de x menor que α, que también verifica a [1], resulta un absurdo; que proviene de haber supuesto que $x^4 - y^4 = z^2$ admitía solución entera.

Tercer caso.—x e y son de la misma paridad.

Demostremos que esta imposibilidad se reduce a la del caso en que x e y sean de distinta paridad.

En efecto: Ya se ha visto que se puede suponer m.c.d. $(x, y) = 1$. Ahora bien, si x e y son primos entre sí, el caso en que x e y sean de la misma paridad puede limitarse al caso de que ambos sean impares, pues si fueran pares no serían primos entre sí.

Si [1] tuviera solución, podría escribirse: $(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2) = z^2$, y por ser x e y de la misma paridad, $x^2 + y^2$ y $x^2 - y^2$ serían pares, es decir, $x^2 + y^2 = 2\,\alpha$, $x^2 - y^2 = 2\,\beta$, $x^2 = \alpha + \beta$, $y^2 = \alpha - \beta$, lo cual nos dice que α y β son primos entre sí, pues si tuviesen un divisor común lo tendrían también su suma x^2 y su diferencia y^2, y por tanto x e y, en contra de lo supuesto de ser m.c.d. $(x, y) = 1$.

Habiendo de ser, por tanto, α y β primos entre sí, para que [1] tenga solución, resultaría que, por ser $z^2 = (x^2 + y^2).\,(x^2 - y^2) = 4\,\alpha\,\beta$, tendrían que ser α y β cuadrados, o sea $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $x^2 + y^2 = 2a^2$ y $x^2 - y^2 = 2b^2$. Además, a y b deberían ser de distinta paridad, porque si fueran de la misma lo serían también a^2 y b^2, con lo cual su suma y su diferencia serían pares, es decir, x^2 e y^2, así como x e y, que ya dijimos eran impares.

En resumen: las soluciones de [1], cuando x e y sean de la misma paridad, serán de la forma: $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = a^2 - b^2$, siendo a y b de distinta paridad, y por tanto, $x^2 \cdot y^2 = a^4 - b^4$ sería un cuadrado; lo que equivale a decir que una diferencia de dos bicuadrados de distinta paridad sería un cuadrado, que ya se demostró no es posible.

IV. Teorema

La ecuación $a^{4n} + b^{4n} = 2 \cdot c^{2n}$, en la que $n > o$; no admite soluciones enteras mayores que la unidad.

Demostración.—Haciendo $a^n = \alpha$, $b^n = \beta$, $c^n = \gamma$ resulta: $\alpha^4 + \beta^4 = 2 \cdot \gamma^2$, y si esta ecuación admitiera soluciones enteras también las admitirían las siguientes: $\alpha^4 + \beta^4 + 2\,\alpha^2\,\beta^2 = 2\,\gamma^2 + 2\,\alpha^2\,\beta^2$ y $\alpha^4 + \beta^4 - 2\,\alpha^2\,\beta^2 = 2\,\gamma^2 - 2\,\alpha^2 \cdot \beta^2$, es decir: $(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 2\,\gamma^2 + 2\,\alpha^2\,\beta^2$ y $(\alpha^2 - \beta^2)^2 = 2\,\gamma^2 - 2\,\alpha^2\,\beta^2$; lo que equivale a decir que las expresiones $2\,\gamma^2 + 2\,\alpha^2\,\beta^2$ y $2\,\gamma^2 - 2\,\alpha^2\,\beta^2$ serían cuadrados perfectos, así como el producto de ambas: $4\,(\gamma^4 - \alpha^4\,\beta^4)$. Por consiguiente, debería ser $\gamma^4 - \alpha^4\,\beta^4 = \gamma^4 - (\alpha \cdot \beta)^4 = z^2$, o bien, haciendo $\gamma = x$, $\alpha \cdot \beta = y$, $x^4 - y^4 = z^2$, lo cual no es posible (como se demostró en el teorema III); como tampoco lo son $\alpha^4 + \beta^4 = 2\,\gamma^2$ y $a^{4n} + b^{4n} = 2 \cdot c^{2n}$.

V. Teorema

La ecuación $a^{4n} + b^{4n} = 2 \cdot c^{4n}$, en la que $n > o$ no admite soluciones enteras mayores que la unidad.

Demostración.— Haciendo $a^n = \alpha$, $b^n = \beta$, $c^{2n} = \gamma$ resulta: $\alpha^4 + \beta^4 = 2\,\gamma^2$, que se ha demostrado anteriormente no admite soluciones enteras mayores de la unidad.

Conclusión

La suma de dos bicuadrados nunca es igual al doble de un bicuadrado, a menos que sean iguales.

En efecto: Si en la ecuación del teorema V se hace $n = 1$, resulta: $a^4 + b^4 = 2 \cdot c^4$, que hemos probado no admite soluciones enteras mayores que la unidad; pero si, por ejemplo, fuera $a = b$, resultaría $2a^4 = 2c^4$ y $a = c$, es decir, $a = b = c$, como se quería demostrar.