NUEVA EXPRESION DE SUMACION

por

JOSE M. BISAY DONDO

INTRODUCCIÓN

La obtención de esta fórmula matemática la logré el 4-8-63, estudiando las 4 relaciones que, sobre sumación, dan, respectivamente, Euler-Mac Laurin, Gregory, Woolhouse y Lubbock.

Tanto en la primera como en la tercera aparecen las derivadas sucesivas de la función; en cambio, en la segunda y en la cuarta aparecen las diferencias retrógradas. Se me ocurrió hacer aparecer, en vez de diferencias retrógradas, las diferencias progresivas de la función, logrando de este modo obtener la expresión que me pertenece.

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_0 + i\,h) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx + \frac{n}{2}\,\Delta f(x_0) + \frac{n(3\,n-2)}{12}\,\Delta^2 f(x_0) +$$

$i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$

$$+ \frac{n(n-2)(2n-1)}{24}\,\Delta^3 f(x_0) + \frac{n}{720}(15\,n^3 - 80\,n^2 + 120\,n -$$

$$- 36)\,\Delta^4 f(x_0) + \frac{n}{1.440}(6\,n^4 - 55\,n^3 + 170\,n^2 - 196\,n + 48)\,\Delta^5 f(x_0) + \ldots$$

MÉTODO DE OBTENCIÓN

A partir de la relación de Euler-Mac Laurin:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_0 + i\,h) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+nh} f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,[f(x_0 + n\,h) - f(x_0)] +$$

$$+ \frac{h}{12}\,[\mathrm{D}\,f(x_0+n\,h) - \mathrm{D}\,f(x_0)] - \frac{h^3}{720}\,[\mathrm{D}^3 f(x_0+n\,h) - \mathrm{D}^3 f(x_0)] + \ldots$$

Hacemos las siguientes transformaciones, aplicando cálculo simbólico

$$\frac{1}{2}\,[f(x_0 + n\,h) - f(x_0)] = \frac{1}{2}\,[E^n\,f(x_0) - f(x_0)[= \frac{1}{2}(E^n - 1)\,f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\,[(1 + \Delta)^n - 1]\,f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(n\,\Delta + \frac{n^{(2)}\,\Delta^2}{2!} + \frac{n^{(3)}\,\Delta^3}{3!} + \frac{n^{(4)}\,\Delta^4}{4!} + \frac{n^{(5)}\Delta^5}{5!} + \ldots\ldots\right) f(x_0)$$

$$\frac{h}{12}\,[D\,f(x_0 + n\,h) - D\,f(x_0)] = \frac{h}{12}\,D\,(E^n - 1)\,f(x^0) =$$

$$= \frac{h}{12}\,D\,f(x_0)\,[(1 + \Delta)^n - 1] =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \ldots.\right)\left(n\,\Delta + \right.$$

$$\left. + \frac{n^{(2)}\,\Delta^2}{2!} + \frac{n^{(3)}\,\Delta^3}{3!} + \frac{n^{(4)}\,\Delta^4}{4!} + \ldots\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left[n\,\Delta^2 + \frac{n^{(2)2}}{2!}\,\Delta^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{n\,(2\,n^2 - 9\,n + 11)}{12}\,\Delta^4 + \frac{n\,(n^3 - 8\,n^2 + 21\,n - 20)}{4!}\,\Delta^5 + \ldots.\right]$$

$$\frac{h^3}{720}\,[D^3\,f(x_0 + n\,h) - D^3\,f(x_0)] = \frac{h^3}{720}\,D^3\,(E^n - 1)\,f(x_0) =$$

$$= \frac{h^3}{720}\,D^3\,f(x_0)\,[(1 + \Delta)^n - 1] =$$

$$= \frac{1}{720}\left(\Delta^3 - \frac{3}{2}\,\Delta^4 + \ldots.\right)\left(n\,\Delta + \frac{n^{(2)}\,\Delta^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{n^{(3)}\,\Delta^3}{3!} + \ldots.\right) = \frac{1}{720}\left[n\,\Delta^4 + \frac{n^{(2)4}}{2}\,\Delta^5 + \ldots.\right]$$

Reemplazando valores, obtenemos la expresión en cuestión.

Observación.—Si se agrega en la relación de Euler-Mac Laurin un término más, o sea en el que aparece la diferencia de derivadas 5.ª entre los puntos de abscisas ($x_0 + nh$) y x_0, a nuestra expresión obtenida, se agregarán 2 términos más, correspondientes a las diferencias de orden 6.º y 7.º, siendo válidos, sin modificar, los términos hallados, que van hasta las diferencias de orden 5º.

BIBLIOGRAFIA

José González Galé: *Probabilidades y Diferencias Finitas.* Prof. Univ. de Buenos Aires. Lib. «El Ateneo», calle Florida, 340. Edic. 1948.

Harry Freeman: *Matemáticas para Actuarios.* Aguilar, S. A. de Ediciones. Madrid.