NOTA SOBRE UN TEOREMA DE APROXIMACION

por

JUAN M. GRACIA MELERO

I. INTRODUCCIÓN.

En varios de sus libros, R. Bellman expone un teorema que afirma que el conjunto de las matrices complejas que tienen raíces características distintas es denso en el espacio de matrices complejas de orden dado, normado con una de las normas habituales. El hecho de que todo polinomio está asociado —en el sentido de la teoría de anillos principales— al polinomio característico de alguna matriz sugiere, fácilmente, un teorema análogo para polinomios. Nos ocupamos de este teorema, de su equivalencia con el anterior y de algunas consecuencias.

En el espacio de polinomios usamos una norma sencilla, pero equivalente a otra muy utilizada en la teoría de la aproximación uniforme por polinomios.

Hemos trabajado con los cuerpos **Q**, **R** y **C**, procurando mantener en los enunciados todo el contenido referido a un mismo cuerpo; lo que no ha sido posible en las demostraciones, por el hecho, bien conocido, de que un polinomio con coeficientes racionales o reales puede tener raíces complejas con parte imaginaria distinta de cero.

Hemos empleado sistemáticamente la noción de resultante de dos polinomios, mirada como función continua de los coeficientes de éstos. También, hemos usado la reducción de una matriz a las formas triangular, de Jordan y natural. Asimismo, deliberadamente damos a veces dos y más pruebas de un resultado para ilustrar las técnicas empleadas.

Finalmente, indicamos algunas aplicaciones de los dos teoremas de aproximación que tratamos en esta nota.

II. NOTACIONES Y TERMINOLOGÍA.

Siempre que no se advierta explícitamente lo contrario, la letra **K** designará en esta nota uno cualquiera de los cuerpos **Q**, **R** o **C** con su topología habitual. Con el uso de la letra neutra **K**, se quieren destacar propiedades que no tienen en cuenta las diferencias entre el cuerpo de los numeros racionales, el cuerpo real o el cuerpo complejo.

Cuando, en lo sucesivo, se sustituya la letra **K** por **Q**, **R** o **C**, se entendera que ese enunciado queda referido al cuerpo elegido. Asi, por ejemplo, si hablamos del teorema 1-**C**, se entendera que nos referimos al teorema cuyo *enunciado* se ha obtenido del teorema 1-**K**, sustituyendo en todos los lugares la letra **K** por la **C**.

Para cada entero $n > 1$, $M_n(\mathbf{K})$ designara el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden n con elementos del cuerpo **K**.

Sea $A = (a_{ij})$ una de tales matrices cuadradas; definimos

$$\| A \| = \sum_{1 < i, j < n} | a_{ij} | ,$$

siendo $| \cdot |$ el valor absoluto habitual en **K**.

Si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},$$

con $x_i \in \mathbf{K}$ para $i = 1, \ldots, n$, se define

$$\| x \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i | .$$

Se demuestra fácilmente que

$$\| A \| = 0$$

sí y sólo si $A = 0$

$$\| c A \| = | c | \; \| A \|$$
$$\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|$$
$$\| A B \| \leqslant \| A \| \; \| B \|$$
$$\| A x \| \leqslant \| A \| \; \| x \|$$

cualesquiera que sean

$$A, B \in M_n(\mathbf{K}), c \in \mathbf{K}, x \in \mathbf{K}^n.$$

Esto define en $M_n(\mathbf{K})$ una de las tres normas habituales.

Pasemos ahora a los polinomios.

Para cada entero $n \geqslant 1$, $H_n(\mathbf{K})$ designará el espacio vectorial de polinomios con coeficientes de **K**, de grado menor o igual que n.

Dado $f \in H_n(\mathbf{K})$, digamos $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, donde $a_{m+1} = \ldots = a_n = 0$ si el grado de f es m, definimos la norma

$$\| f \| = \sum_{i=0}^{n} | a_i |$$

en el espacio $H_n(\mathbf{K})$.

Designemos ahora por E un subconjunto acotado del plano complejo, que tenga al menos $n + 1$ puntos, y definamos

$$\| f \|_E = \sup_{z \in E} | f(z) |$$

donde $f \in H_n(\mathbf{K})$.

Como E está acotado, existe un número real $M > 0$, tal que $| z | \leqslant M$ para todo punto z de E. Por otro lado, $| f |$ es una función continua (por ser f un polinomio), por lo que está acotada superiormente en el disco cerrado $\overline{D}(0; M)$ de centro el origen y radio M; y por lo tanto $| f(z) |$ se mantiene acotado superiormente en E. Así, pues, $\| f \|_E$ es un número finito para cada $f \in H_n(\mathbf{K})$.

Es fácil probar que $\| \cdot \|_E$ es una norma sobre $H_n(\mathbf{K})$. En efecto, $\| f \|_E = 0$ si y sólo si $f = 0$ se deduce del hecho de que si un polinomio de grado $\leqslant n$ se anula en más de n puntos, debe ser el polinomio cero (ésta es una de las razones por las que se ha exigido que el cardinal de E fuese mayor que n). Las otras condiciones que debe cumplir una norma se deducen fácilmente de las propiedades del extremo superior de un conjunto de números reales.

En esta segunda norma empleamos la notación $\| \cdot \|_E$ para hacer notar que depende del conjunto E. No obstante, ahora veremos una proposición que nos dice que la topología métrica que $\| \cdot \|_E$ induce en $H_n(\mathbf{K})$ no depende del conjunto E, siempre que éste se elija acotado y con más de n puntos.

Proposición 1.—Las normas $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_E$, *definidas sobre* $H_n(\mathbf{K})$, *son equivalentes.*

Prueba. Todo lo que debemos hacer es probar que existen dos números reales $a > 0$, $b > 0$, tales que

$$\| f \|_E \leqslant a \| f \| \quad \text{y} \quad \| f \| \leqslant b \| f \|_E$$

para todo $f \in H_n(\mathbf{K})$ [(ref. 2), Cap. IX, §3.3 Proposition 7].

La existencia de la constante a es trivial. Como E es acotado, existe un número real $M > 0$, tal que $| z | \leqslant M$, $\forall z \in E$. Por otro lado, las funciones continuas $1, | z |, | z^2 |, \ldots, | z^n |$ están acotadas en el disco cerrado $\overline{D}(0; M)$ de centro el origen y radio M. Elijamos a de manera que

$$\max_{|z| \leqslant M} | z^m | < a \text{ , para todo } m = 0, 1, \ldots, n;$$

luego en particular es $a > 1$, y por lo tanto $a > 0$.

Por consiguiente, para cualquier $z \in E$ se tiene que

$$| f(z) | \leqslant \sum_{m=0}^{n} | a_m | \, | z^m | < a \, || f || ,$$

siendo

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n.$$

Por lo tanto

$$|| f ||_E \leqslant a \, || f ||$$

cualquiera que sea $f \in H_n(\mathbf{K})$.

Obsérvese que si $E \subset \mathbf{R}$, entonces existe un intervalo cerrado $[c, d]$ que contiene a E, y bastaría utilizar la acotación de las funciones continuas $1, x, x^2, \ldots, x^n$ sobre $[c, d]$.

La existencia de la constante b es algo más difícil de probar. Sea f un polinomio cualquiera perteneciente a $H_n(\mathbf{K})$, digamos $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Elijamos $n + 1$ puntos distintos

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n+1} \qquad [1]$$

del conjunto E (éste es otro motivo por el que hemos condicionado el cardinal de E a ser mayor o igual que $n + 1$), que conservaremos fijos en el resto de la prueba

Entonces

$$\begin{array}{l} a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots + a_n z_1^n = f(z_1), \\ a_0 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \ldots + a_n z_2^n = f(z_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 z_{n+1} + a_2 z^2_{n+1} + \ldots + a_n z^n_{n+1} = f(z_{n+1}). \end{array} \qquad [2]$$

Si conocemos los puntos [1] y los valores de polinomio en estos puntos, podemos calcular los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de este polinomio a partir del sistema de ecuaciones lineales [2], cuyo determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^n \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & z_{n+1} & z^2_{n+1} & \ldots & z^n_{n+1} \end{vmatrix}$$

es un determinante de Vandermonde, y como los números $z_1, \ldots, z_{n+1}$ son distintos, D es no igual a cero. Por lo que, usando la regla de Cramer, obtenemos

$$a_k = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \ldots z_1^{k-1} & f(z_1) & z_1^{k+1} \ldots & z_1^n \\ 1 & z_2 & \ldots z_2^{k-1} & f(z_2) & z_2^{k+1} \ldots & z_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_{n+1} & \ldots z_{n+1}^{k-1} & f(z_{n+1}) & z_{n+1}^{k+1} \ldots & z_{n+1}^{n} \end{vmatrix}, \quad (k=0, 1, \ldots, n).$$

Si desarrollamos el determinante del numerador por los elementos de la columna $(k + 1)$-ésima, se obtiene la expresión

$$a_k = A_{1k} f(z_1) + A_{2k} f(z_2) + \dots + A_{n+1,k} f(z_{n+1})$$

donde

$$A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{n+1,k}$$

están totalmente determinadas por los puntos [1] y el número k, pero son independientes del polinomio elegido.

De donde se deduce que

$$|a_k| \leqslant (|A_{1k}| + |A_{2k}| + \dots + |A_{n+1,k}|) \, ||f||_E, \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Por tanto, si ponemos

$$b = \sum_{k=0}^{n} (|A_{1k}| + |A_{2k}| + \dots + |A_{n+1,k}|)$$

se tiene que

$$||f|| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leqslant b \, ||f||_E$$

para todo

$$f \in H_n(\mathbf{K}),$$

donde b es independiente de f, y mayor que cero. Ya que si fuese $b = 0$ se tendría que $A_{ik} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n + 1$; y para todo $k = 0, \dots, n$. Y por lo tanto $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ para *todo* polinomio $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$; lo que es absurdo.

Esto completa la demostración.

III. Teorema 1 - K

Dada $A \in M_n(\mathbf{K})$ *y un número real* $\varepsilon > 0$, *existe* $B \in M_n(\mathbf{K})$, *con raíces características distintas, tal que* $||A - B|| \leqslant \varepsilon$.

Prueba. Consideremos la matriz $A + E$, donde $E = (e_{ij})$, con $E \in M_n(\mathbf{K})$. Si $A + E$ tiene una raíz característica múltiple, entonces $f_E(z) = |A + E - z I|$ y $f'_E(z)$ tienen una raíz común. Si $f_E(z)$ y $f'_E(z)$ tienen una raíz común, la resultante de estos dos polinomios, $R(E) = R(f_E, f'_E)$, debe anularse.

$R(E)$ es un polinomio en las n^2 indeterminadas $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{nn}$. Brevemente $R(E) \in \mathbf{K}[e_{11}, e_{12}, \dots, e_{nn}]$, digamos

$$R(E) = \sum_{(m_{11}, m_{12}, \dots, m_{nn})} a_{m_{11} m_{12} \dots m_{nn}} e_{11}^{m_{11}} e_{12}^{m_{12}} \dots e_{nn}^{m_{nn}}.$$

donde la familia

$$\{ a_{m_{11}\, m_{12}\, \ldots\, m_{nn}} \}_{(m_{11},\, m_{12},\, \ldots,\, m_{nn}) \in \mathrm{N}^{n^2}}$$

de elementos de **K** tiene «casi todos los términos nulos».

Queremos probar que existe una $\mathrm{E} = (e_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, tal que

$$\| \mathrm{E} \| = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} | e_{ij} | \leqslant \varepsilon \quad \text{y} \quad \mathrm{R(E)} \neq 0.$$

Lo haremos por reducción al absurdo. Si tal E no existiese, sería porque para todo $\mathrm{E} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$, tal que $\| \mathrm{E} \| \leqslant \varepsilon$ se tendría que $\mathrm{R(E)} = 0$.

Tomemos una $\dot{\mathrm{E}} = (\dot{e}_{ij})$ de éstas, tal que $\| \dot{\mathrm{E}} \| \leqslant \varepsilon$ y $\dot{e}_{ij} \neq 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Dejemos fijos $\dot{e}_{12}, \dot{e}_{13}, \ldots, \dot{e}_{nn}$. Podemos elegir e_{11} de *infinitas maneras* en **K**, de manera que

$$\left\| \begin{pmatrix} e_{11} & \dot{e}_{12} & \ldots & \dot{e}_{1n} \\ \dot{e}_{21} & \dot{e}_{22} & \ldots & \dot{e}_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \dot{e}_{n1} & \dot{e}_{n2} & \ldots & \dot{e}_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leqslant \varepsilon$$

pues

$$\sum_{(i,j) \neq (1,1)} |\dot{e}_{ij}| < \| \dot{\mathrm{E}} \| \leqslant \varepsilon ;$$

y por tanto

$$\sum_{(m_{11},\, m_{12},\, \ldots,\, m_{nn})} a_{m_{11}\, m_{12}\, \ldots\, m_{nn}}\, e_{11}^{m_{11}}\, \dot{e}_{12}^{m_{12}} \ldots \dot{e}_{nn}^{m_{nn}} \qquad [1]$$

se anula para *infinitos valores* de $e_{11} \in \mathbf{K}$. Ahora bien, [1] puede mirarse como un polinomio con coeficientes de **K** en una indeterminada, e_{11} (i.e. un elemento de $\mathbf{K}[e_{11}]$), y como $\dot{e}_{ij} \neq 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$, se tiene que $a_{m_{11}\, m_{12}\, \ldots\, m_{nn}} = 0$ para todo $(m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{nn}) \in \mathrm{N}^{n^2}$. Por lo que R(E) sería el polinomio cero de $\mathbf{K}[e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{nn}]$, y por lo tanto $\mathrm{R(E)} = 0$ (número cero) para todo $\mathrm{E} \in \mathrm{M}_n(\mathbf{K})$.

Mas esto es imposible, ya que tomando $e_{ij} = - a_{ij}$ si $i \neq j$, y $e_{ii} = i - a_{ii}$ queda

$$\mathrm{A} + \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 2 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 3 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots n \end{pmatrix}$$

cuyas raíces características son simples, a saber: $1, 2, 3, \ldots, n$.

Esto completa la demostración.

Nota. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, puede modificarse el argumento anterior, para probar que R(E) es igual al polinomio cero, usando las derivadas parciales. En efecto, identificando $E = (e_{ij})$ con el vector

$$(e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2n}, \ldots, e_{n1}, e_{n2}, \ldots, e_{nn}) \in \mathbf{R}^{n^2},$$

i. e. identificando $M_n(\mathbf{R})$ con $\mathbf{R}^{n^2}$, se tiene $\mathbf{R}^{n^2}$ como espacio vectorial normado con la norma

$$\| E \| = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} | e_{ij} | .$$

Decir que $R(E) = 0$ para todo $E \in M_n(\mathbf{R})$ tal que $\| E \| \leqslant \varepsilon$ equivale a decir que existe una bola cerrada $\overline{B}(0 ; \varepsilon)$ de centro 0 y radio ε del espacio $\mathbf{R}^{n^2}$ en la que se anula R(E); por otra parte, las normas

$$\| E \| = \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} | e_{ij} | \text{ y } \| E \| = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} | e_{ij} |^2}$$

son equivalentes en $\mathbf{R}^{n^2}$, lo que implica que los límites calculados con una u otra, si existen, son los mismos. Por lo que las derivadas parciales, de todos los órdenes, de R(E) con respecto a las e_{ij} se anulan en $0 \in B(0;\varepsilon)$, ya que R(E) es constante sobre $B(0 ; \varepsilon)$. Y como

$$\frac{\partial^{m_{11}+m_{12}+\cdots+m_{nn}} R}{\partial e_{11}^{m_{11}} \partial e_{12}^{m_{12}} \ldots \partial e_{nn}^{m_{nn}}}(0) = (m_{11}!\, m_{12}! \ldots m_{nn}!)\, a_{m_{11} m_{12} \ldots m_{nn}},$$

se sigue que

$$a_{m_{11} m_{12} \ldots m_{nn}} = 0$$

para todo $(m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{nn}) \in N^{n^2}$, pues $m! \neq 0$ para todo entero $m \geqslant 0$.

Otra prueba del teorema 1 — $\mathbf{C}$.

Como $\mathbf{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. existe una matriz T no singular tal que

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \Delta$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son las raíces características de A. no necesariamente simples. La matriz Δ es triangular.

Como T es no singular, se tiene que $T \neq 0$ y $T^{-1} \neq 0$; por lo tanto, $\| T \| \neq 0$ y $\| T^{-1} \| \neq 0$, pues $\| \cdot \|$ es una norma.

Elijamos ahora n números complejos distintos $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} | \lambda_i - \lambda'_i | \leqslant \frac{\varepsilon}{\| T \| \, \| T^{-1} \|}.$$

Si C es la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 & b_{12} \ldots b_{1n} \\ 0 & \lambda'_2 \ldots b_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ 0 & 0 \ \ldots \lambda'_n \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\| \Delta - C \| = \sum_{i=1}^{n} | \lambda_i - \lambda'_i | < \frac{\varepsilon}{\| T \| \, \| T^{-1} \|}.$$

Si ponemos $B = T C T^{-1}$, entonces B tiene por raíces características $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$, que son distintas. Además

$$\| A - B \| = \| T \Delta T^{-1} - T C T^{-1} \| = \| T (\Delta - C) T^{-1} \| \leqslant \\ \| T \| \, \| \Delta - C \| \, \| T^{-1} \| \leqslant \varepsilon.$$

Esto completa la demostración.

Nota. Es evidente que podría haberse usado, en el argumento anterior, la reducción de la matriz A a la forma canónica de Jordan.

Corolario 1 — **C**.—*Dada* $A \in M_n(\mathbf{C})$, *y un número real* $\varepsilon > 0$, *existe* $B \in M_n(\mathbf{C})$, *con raíces características distintas, no singular, tal que*

$$\| A - B \| \leqslant \varepsilon.$$

Prueba. Si se observa la demostración anterior, se ve que es posible elegir los números $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ teniendo el cuidado de que ninguno sea cero. Esto completa la demostración.

Otra prueba del teorema 1 — **Q.**

Como $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, dada $A \in M_n(\mathbf{Q})$, por el teorema 1 — **R** existe $B_1 \in M_n(\mathbf{R})$, con raíces características simples, tal que

$$\| A - B_1 \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Designemos con P_X el polinomio característico de la matriz X.

Sea $R(f, g)$ la resultante de los polinomios f y g; por tener B_1 sus raíces características simples se tiene que $R(P_{B_1}, P'_{B_1}) \neq 0$.

Ahora bien, por el lema 2 — **R** (cuya demostración veremos más adelante) $X \longrightarrow P_X$ es una aplicación continua de $M_n(\mathbf{R})$ en $H_n(\mathbf{R})$.

Por otra parte, $f \longrightarrow R(f, f')$ es una aplicación continua de $H_n(\mathbf{R})$ en **R** (por ser la resultante de f y f' un determinante —y por lo tanto un polinomio— en los coeficientes de f). En consecuencia, $X \longrightarrow R(P_X, P'_X)$ es una función real continua definida en $M_n(\mathbf{R})$; en particular, es continua en B_1, y, como $R(P_{B_1}, P'_{B_1}) \neq 0$, existe un número real $\delta > 0$, que podemos elegir menor que $\varepsilon/_2$, tal que $R(P_X, P'_X) \neq 0$, siempre que $\| X - B_1 \| < \delta$, $X \in M_n(\mathbf{R})$.

Si, ahora, tenemos en cuenta que $M_n(\mathbf{Q})$ es denso en $M_n(\mathbf{R})$ (por ser **Q** denso en **R**), vemos que es posible elegir $B \in M_n(\mathbf{Q})$, tal que $\| B - B_1 \| < \delta$ y por consiguiente $R(P_B, P'_B) \neq 0$; lo que significa que las raíces características de B son simples.

Como

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2},$$

concluimos finalmente que

$$\| A - B \| \leqslant \| A - B_1 \| + \| B_1 - B \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto completa la demostración.

IV. Teorema 2 — K

Vamos a trabajar ahora en el espacio de polinomios $H_n(\mathbf{K})$. Según vimos en la proposición 1, y con aquellas notaciones, las normas $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_E$ son equivalentes. Por lo tanto, los resultados de este apartado, que sólo dependen de la topología de $H_n(\mathbf{K})$, valen para cualquiera de las normas $\| \cdot \|$ y $\| \cdot \|_E$.

Por razones de comodidad emplearemos en las demostraciones la norma $\| \cdot \|$.

Teorema 2 — **K**.—*Sea* $n \geqslant m \geqslant 1$, *y sea* $G_m(\mathbf{K})$ *el subconjunto de* $H_n(\mathbf{K})$ *formado por los polinomios de grado m. Entonces el conjunto,* $S_m(\mathbf{K})$, *de polinomios de grado m, con coeficientes de* **K**, *cuyas raíces son simples, es denso en* $G_m(\mathbf{K})$, *respecto de la topología de* $H_n(\mathbf{K})$.

Prueba. Esta demostración es válida para **K** igual a **Q**, **R** o **C**. La técnica usada es la misma que la de la prueba del teorema 1 — **K**.

Queremos demostrar que $G_m(\mathbf{K}) \subset \overline{S_m(\mathbf{K})}$. De manera equivalente, dado el polinomio $f \in G_m(\mathbf{K})$, y el número real $\varepsilon > 0$, queremos probar que existe un polinomio $g \in S_m(\mathbf{K})$, tal que $\| f - g \| \leqslant \varepsilon$.

Sea $f(z) = a_0 + \ldots + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m$; consideremos el polinomio $f_\delta(z) = (a_0 + \delta_0) + \ldots + (a_{m-1} + \delta_{m-1}) z^{m-1} + a_m z^m$, donde $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1}) \in \mathbf{K}^m$. Si f_δ tiene una raíz múltiple, entonces f_δ y f'_δ tienen una raíz común. Por consiguiente, su resultante, $R(\delta) = R(f_\delta, f'_\delta)$, debe anularse.

$R(\delta)$ es un polinomio en las m indeterminadas $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1}$. Brevemente $R(\delta) \in \mathbf{K}[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1}]$, digamos

$$R(\delta) = \sum_{(r_0, \ldots, r_{m-1})} a_{r_0 \ldots r_{m-1}} \delta_0^{r_0} \ldots \delta_{m-1}^{r_{m-1}}$$

donde la familia $\{a_{r_0 \ldots r_{m-1}}\}_{(r_0, \ldots, r_{m-1}) \in N^m}$ de elementos de $\mathbf{K}$, tiene «casi todos los términos nulos».

Queremos probar que existe un $\delta = (\delta_0, \ldots, \delta_{m-1}) \in \mathbf{K}^m$, tal que

$$\| \delta \| = \sum_{i=0}^{m-1} | \delta_i | \leqslant \varepsilon \quad \text{y} \quad R(\delta) \neq 0.$$

Lo haremos por reducción al absurdo. Si tal δ no existiese, sería porque para todo $\delta \in \mathbf{K}^m$ tal que $\| \delta \| \leqslant \varepsilon$ se tendría que $R(\delta) = 0$.

Tomemos un $\dot{\delta} = (\dot{\delta}_0, \dot{\delta}_1, \ldots, \dot{\delta}_{m-1})$ de éstos, tal que $\| \dot{\delta} \| \leqslant \varepsilon$ y $\dot{\delta}_i \neq 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots, m - 1$. Dejemos fijos $\dot{\delta}_1, \ldots, \dot{\delta}_{m-1}$. Podemos elegir δ_0 de *infinitas* maneras en $\mathbf{K}$ de manera que

$$\| (\dot{\delta}_0, \dot{\delta}_1, \ldots, \dot{\delta}_{-m_1}) \| \leqslant \varepsilon$$

pues

$$\sum_{i=1}^{m-1} | \dot{\delta}_i | < \| \dot{\delta} \| \leqslant \varepsilon,$$

y por lo tanto

$$\sum_{(r_0, r_1, \ldots, r_{m-1})} a_{r_0 r_1 \ldots r_{m-1}} \delta_0^{r_0} \dot{\delta}_1^{r_1} \ldots \dot{\delta}_{m-1}^{r_{m-1}} \qquad [1]$$

se anula para *infinitos* valores de $\delta_0 \in \mathbf{K}$. Ahora bien, [1] puede mirarse como un polinomio con coeficientes de $\mathbf{K}$ en una indeterminada, δ_0 (i. e. un elemento de $\mathbf{K}[\delta_0]$), y como $\dot{\delta}_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m - 1$, se tiene que $a_{r_0 r_1 \ldots r_{m-1}} = 0$ para todo $(r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}) \in N^m$. Por lo que $R(\delta)$ sería el polinomio cero de $\mathbf{K}[\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1}]$, y, por consiguiente, $R(\delta) = 0$ (número cero) para todo $\delta \in \mathbf{K}^m$.

Pero esto es imposible, ya que el polinomio $h(z) = a_m (z - 1)(z - - 2) \ldots (z - m)$, de grado m, tiene sus raíces simples, a saber: $1, 2, \ldots, m$ y desarrollando $h(z)$, obtenemos $h(z) = a_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0$, por lo que $h = f_\delta$ si definimos $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{m-1})$ así: $\delta_0 = b_0 - - a_0, \ldots, \delta_{m-1} = b_{m-1} - a_{m-1}$.

Esto completa la demostración.

A continuación, pecando una vez más de redundancia, daremos una demostración para el caso $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, usando el teorema 2 — $\mathbf{R}$, y que $\mathbf{Q}$ es denso en $\mathbf{R}$.

*Otra prueba del teorema 2 — **Q**.*

Sea $f \in G_m(\mathbf{Q})$ y $\varepsilon > 0$; por el teorema 2 — **R** existe $g_1 \in S_m(\mathbf{R})$, tal que

$$\| f - g_1 \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como g_1 y g'_1 no tienen raíces comunes se sigue que $R(g_1, g'_1) \neq 0$; por otra parte, $g \longrightarrow R(g, g')$ es una aplicación continua de $G_m(\mathbf{R})$ en $\mathbf{R}$, por lo que existe un número $\delta > 0$, que podemos elegir menor que $\varepsilon/_2$, tal que $R(g, g') \neq 0$, siempre que $\| g_1 - g \| < \delta$. Ahora bien, $G_m(\mathbf{Q})$ es denso en $G_m(\mathbf{R})$, luego existe un $g \in G_m(\mathbf{Q})$ que verifica $\| g_1 - g \| < \delta$, y por consiguiente $g \in S_m(\mathbf{Q})$, ya que $R(g, g') \neq 0$.

Como

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2},$$

concluimos que

$$\| f - g \| < \| f - g_1 \| + \| g_1 - g \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Esto completa la demostración.

Corolario 1 — **K**.—*Si* $p > m \geqslant 0$, *se tiene que* $G_m(\mathbf{K}) \subset \overline{G_p(\mathbf{K})}$; *y por lo tanto* $G_m(\mathbf{K}) \subset \overline{S_p(\mathbf{K})}$.

Prueba. Sea $f(z) = a_0 + \ldots + a_m z^m$ un elemento cualquiera de $G_m(\mathbf{K})$, y supongamos dado un número real $\varepsilon > 0$. Si tomamos $g(z) = \varepsilon/_2\, z^p + a_m z^m + \ldots + a_0$, se sigue que

$$\| f - g \| = \sum_{i=0}^{m} | a_i - a_i | + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así, pues, $G_m(\mathbf{K}) \subset \overline{G_p(\mathbf{K})}$.

Por otra parte, $G_p(\mathbf{K}) \subset \overline{S_p(\mathbf{K})}$; lo que implica que $\overline{G_p(\mathbf{K})} \subset \overline{S_p(\mathbf{K})}$, luego $G_m(\mathbf{K}) \subset \overline{S_p(\mathbf{K})}$.

Esto completa la demostración.

Corolario 2 — **K**.—*Sea* n *un entero positivo* ($n > 0$). *El conjunto* $S_n(\mathbf{K})$ *de polinomios de grado* n, *cuyas raíces son simples, es denso en* $H_n(\mathbf{K})$; *y como consecuencia, el conjunto* $S(\mathbf{K})$ *de polinomios de grado* $\geqslant 1$, *de* $H_n(\mathbf{K})$, *cuyas raíces son simples, es denso en* $H_n(\mathbf{K})$.

Prueba. Designemos por 0 al polinomio cero. Entonces, evidentemente,

$$H_n(\mathbf{K}) = \{ 0 \} \cup G_0(\mathbf{K}) \cup G_1(\mathbf{K}) \cup \ldots \cup G_n(\mathbf{K}) \qquad [1]$$

Por el corolario 1 — **K** se tiene que

$$G_0(\mathbf{K}) \cup \ldots \cup G_n(\mathbf{K}) \subset \overline{S_n(\mathbf{K})} \qquad [2]$$

Además, $0 \in \overline{S_n(\mathbf{K})}$. En efecto, dado el número real $\varepsilon > 0$, consideremos el polinomio de grado n,

$$g(z) = \frac{\varepsilon}{2} z^n.$$

Como $G_n(\mathbf{K}) \subset \overline{S_n(\mathbf{K})}$, existe $f \in S_n(\mathbf{K})$, tal que

$$\| g - f \| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Por lo tanto,

$$\| 0 - f \| \leqslant \| 0 - g \| + \| g - f \| < \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 = \varepsilon.$$

Lo que implica que

$$0 \in \overline{S_n(\mathbf{K})}.$$

Por consiguiente, de [1] y [2] deducimos que

$$H_n(\mathbf{K}) = \{ 0 \} \cup \left(\bigcup_{m=0}^{n} G_m(\mathbf{K}) \right) \subset \overline{S_n(\mathbf{K})}.$$

Por otra parte, de $S_n(\mathbf{K}) \subset S(\mathbf{K})$ se deduce que $\overline{S_n(\mathbf{K})} \subset \overline{S(\mathbf{K})}$. De donde

$$H_n(\mathbf{K}) \subset \overline{S(\mathbf{K})} ,$$

lo que implica

$$\overline{S(\mathbf{K})} = H_n(\mathbf{K}).$$

Esto completa la demostración.

Corolario 3 — **K.**—*Dados $f \in G_m(\mathbf{K})$, un subconjunto finito* F *de* **C**, *y un número real $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $g \in S_m(\mathbf{K})$, cuyas raíces están fuera de* F, *tal que $\| f - g \| \leqslant \varepsilon$.*

Prueba del corolario 3 — **C.**

Por el teorema 2 — **C** existe un polinomio g_1 con coeficientes complejos, de grado m, cuyas raíces son simples, tal que

$$\| f - g_1 \| \leqslant \varepsilon/_2. \qquad [1]$$

Sea $g_1(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0$ este polinomio, y sean $z_1, z_2, \ldots . z_m$ sus raíces, cuyos subíndices consideramos fijados desde ahora. Sabemos que $g_1(z) = b_m (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m)$.

Pongamos

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m) = z^m + c_{m-1} z^{m-1} + \dots + c_0,$$

de donde se deducen las fórmulas (Vieta) que relacionan los coeficientes y las raíces de una ecuación polinómica:

$$c_{m-k} = (-1)^k \Sigma z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k},$$

donde la suma del segundo miembro se extiende a todas las partes $\{ i_1, \dots, i_k \}$ con k elementos del conjunto $\{ 1, \dots, m \}$ $(k = 1, \dots, m)$.

Evidentemente, para cada k,

$$(u_1, \dots, u_m) \longrightarrow d_{m-k}(u_1, \dots, u_m) = (-1)^k \Sigma u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$$

es una aplicación continua, d_{m-k}, de $\mathbb{C}^m$ en $\mathbb{C}$ (función simétrica elemental). Y por lo tanto,

$$(u_1, \dots, u_m) \longrightarrow (1, d_{m-1}, d_{m-2}, \dots, d_0)$$

es una aplicación continua de $\mathbb{C}^m$ en $\mathbb{C}^{m+1}$; por consiguiente, existe un número $\delta > 0$, tal que si $\| (z_1, \dots, z_m) - (u_1, \dots, u_m) \| \leqslant \delta$, se sigue que

$$\left\| \frac{1}{b_m} g_1 - g \right\| = \| (1, c_{m-1}, \dots, c_0) - (1, d_{m-1}, \dots, d_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{| b_m |}$$

donde

$$g(z) = z^m + d_{m-1} z^{m-1} + \dots + d_0 = (z - u_1) \dots (z - u_m)$$

siendo

$$d_{m-k} = d_{m-k}(u_1, \dots, u_m) \; ; \; k = 1, \dots, m.$$

Como las raíces $z_1, \dots, z_m$ son distintas, podemos trazar un pequeño círculo de radio δ_i alrededor de z_i de manera que los discos abiertos $D(z_i \, ; \, \delta_i)$ $(i = 1, \dots, m)$ sean disjuntos dos a dos. Es evidente que podemos elegir cada δ_i menor que δ / m.

Por ser F finito podemos elegir un punto $v_i \in D(z_i \, ; \, \delta_i) - F$ para cada $i = 1, \dots, m$. Entonces

$$\| (z_1, \dots, z_m) - (v_1, \dots, v_m) \| = \sum_{i=1}^{m} | z_i - v_i | <$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \delta_i < m \frac{\delta}{m} = \delta.$$

luego

$$\left\| \frac{1}{b_m} g_1 - h \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|b_m|}, \qquad [2]$$

donde $h(z) = (z - v_1) \ldots (z - v_m)$ y, evidentemente, las raíces $v_1, \ldots, v_m$ de h son distintas y están fuera de F por la manera de elegirlas; y lo mismo ocurre al polinomio, de grado m, $g = b_m h$.

De [2] deducimos que $\| g_1 - g \| \leqslant \varepsilon/_2$, lo que, junto con [1], implica que

$$\| f - g \| \leqslant \| f - g_1 \| + \| g_1 - g \| \leqslant \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 = \varepsilon.$$

Esto completa la demostración.

Proposición 2.—*Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio con coeficientes complejos, no idénticamente cero, definido sobre $\mathbf{R}^n$. Entonces el complementario del conjunto $f^{-1}(0)$ es denso en $\mathbf{R}^n$.*

Prueba. Sea $y \in \mathbf{R}^n$ un punto tal que $f(y) \neq 0$; sea x un punto cualquiera de $\mathbf{R}^n$. $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$ es un polinomio con coeficientes complejos en la variable t, no idénticamente nulo ($\varphi(1) = f(y) \neq 0$); por lo tanto, existen valores reales de t arbitrariamente pequeños, tales que $\varphi(t) \neq 0$. Esto demuestra que x es un punto adherente al conjunto complementario de $f^{-1}(0)$.

Esta proposición es análoga a la Proposition 3 del § 1.4. Capítulo VI (ref. 2).

Prueba del corolario 3 — **R.**

Dado f; por el teorema 2 — **R** existe un polinomio $h \in S_m(\mathbf{R})$ tal que $\| f - h \| \leqslant \varepsilon/_2$.

Sea $F = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \}$; consideremos ahora el polinomio con coeficientes complejos $m_F(z) = (z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_p)$; sus raíces, que son simples, son los elementos de F. Sea ahora g un polinomio cualquiera de $G_m(\mathbf{R})$; si identificamos $G_m(\mathbf{R})$ con $\mathbf{R}^{m+1}$, podemos mirar la resultante $R(g, m_F)$, de g y m_F, como un polinomio en los coeficientes de g. Este polinomio no es idénticamente cero, pues, evidentemente, existen polinomios g con coeficientes reales de grado m, cuyas raíces no pertenecen a F; por lo tanto, aplicando la proposición 2, se deduce que el conjunto $\{ g \in G_m(\mathbf{R}) \mid R(g, m_F) \neq 0 \}$ es denso en $G_m(\mathbf{R})$.

Por otro lado, para cualquier polinomio P, la resultante $R(P, P')$ es un polinomio en los coeficientes de P, por lo tanto la correspondencia $P \longrightarrow R(P, P')$ es una aplicación continua de $G_m(\mathbf{R})$ en **R**. Ahora bien, como h tiene sus raíces simples, se tiene que $R(h, h') \neq 0$; por lo tanto existe un número real $\delta > 0$, que podemos elegir menor que $\varepsilon/_2$, tal que $R(P, P') \neq 0$ para todo $P \in G_m(\mathbf{R})$, tal que $\| P - h \| < \delta$. (Señalemos, de pasada, que esto significa que en $G_m(\mathbf{R})$ el subconjunto $S_m(\mathbf{R})$ es abierto).

En particular, podemos elegir un polinomio

$$g \in \{ g \in G_m(\mathbf{R}) \mid R(g, m_F) \neq 0 \}$$

tal que

$$\| g - h \| < \delta ,$$

por ser éste un conjunto denso.

Para este g, tenemos, pues, que $R(g, g') \neq 0$, por lo tanto, $g \in S_m(\mathbf{R})$; y como $R(g, m_F) \neq 0$, g tiene sus raíces fuera de F. Además

$$\| f - g \| \leqslant \| f - h \| + \| h - g \| < \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 = \varepsilon.$$

Esto completa la prueba del corolario.

Prueba del corolario 3 — $\mathbf{Q}$.

Sea $F = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \}$; dado $f \in G_m(\mathbf{Q})$, y un número real $\varepsilon > 0$, queremos probar que existe un polinomio $g \in S_m(\mathbf{Q})$, tal que

$$g(\alpha_i) \neq 0 \quad \forall_i \in \{ 1, \ldots, p \}, \text{ y } \| f - g \| \leqslant \varepsilon.$$

Como $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ se sigue que $G_m(\mathbf{Q}) \subset G_m(\mathbf{R})$ y $S_m(\mathbf{Q}) \subset S_m(\mathbf{R})$.

Por el corolario 3 — $\mathbf{R}$ existe $g_1 \in S_m(\mathbf{R})$ tal que

$$g_1(\alpha_i) \neq 0 \quad \forall_i \in \{ 1, \ldots, p \} ,$$

que verifica

$$\| f - g_1 \| \leqslant \varepsilon/_2 .$$

Por otro lado, las aplicaciones:

$$P \longrightarrow R(P, P') \quad \text{de} \quad G_m(\mathbf{R}) \quad \text{en} \quad \mathbf{R}$$

y

$$P \longrightarrow R(P, m_F) \quad \text{de} \quad G_m(\mathbf{R}) \quad \text{en} \quad \mathbf{C}$$

son continuas, donde m_F es el polinomio de coeficientes complejos

$$m_F(z) = (z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_p).$$

Teniendo en cuenta que $R(g_1, g'_1) \neq 0$, pues $g_1 \in S_m(\mathbf{R})$, y que $R(g_1, m_F) \neq 0$, pues g_1 tiene sus raíces fuera de F, vemos que se puede encontrar un número real $\delta > 0$ (que podemos elegir menor que $\varepsilon/_2$), tal que $R(P, P') \neq 0$ y $R(P, m_F) \neq 0$ si $\| g_1 - P \| < \delta$ y $P \in G_m(\mathbf{R})$. Pero $G_m(\mathbf{Q})$ es denso en $G_m(\mathbf{R})$, ya que $\mathbf{Q}$ lo es en $\mathbf{R}$; y, por consiguiente, podemos elegir un polinomio $g \in G_m(\mathbf{Q})$ tal que $\| g_1 - g \| < \delta$. En particular, para este polinomio g tendremos que $R(g, g') \neq 0$ y $R(g, m_F) \neq 0$; lo que significa que $g \in S_m(\mathbf{Q})$ y que g tiene sus raíces fuera de F. Además

$$\| f - g \| \leqslant \| f - g_1 \| + \| g_1 - g \| \leqslant \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 = \varepsilon.$$

Esto completa la demostración.

V. Equivalencia de los teoremas 1 — K y 2 — K

Empezaremos probando que el teorema 1 — **K** implica el teorema 2 — **K**. Para ello, usaremos dos lemas, que exponemos a continuación.

Lema 1 — **K**.—*Sea* $A = (a_{ij})$ *una matriz cuadrada de orden* m *con elementos de un anillo* K. *Si* H *es una parte del conjunto* $\{ 1, 2, \ldots, m \}$ *se designa por* A_H *la matriz cuadrada formada por los terminos* a_{ij} *de* A, *tales que* $i \in H$ y $j \in H$. *Sea*

$$P_A(z) = \det (A - z I)$$

el polinomio característico de A. *Si lo escribimos en la forma*

$$(-1)^m P_A(z) = z^m - \tau_1(A) z^{m-1} + \tau_2(A) z^{m-2} - \ldots + (-1)^m \tau_m (A)$$

entonces los coeficientes $\tau_p(A)$ *de este polinomio vienen dados por la fórmula*

$$\tau_p(A) = \sum_H \det (A_H) \quad , \quad (p = 1, \ldots, m) ,$$

donde la suma se extiende a las

$$\binom{m}{p}$$

partes H *de* $\{ 1, 2, \ldots, m \}$ *cuyo cardinal es igual a* p.

No damos la prueba. Es fácil. Ver, por ejemplo [(ref. 4), Cap. 3 § 7, página 72].

Lema 2 — **K**.—*Sea* $n \geqslant m$; *la correspondencia* $A \longrightarrow P_A$ *que asocia a cada matriz cuadrada* A *su polinomio característico* P_A, *es una aplicación continua del espacio* $M_m(\mathbf{K})$ *en el espacio* $H_n(\mathbf{K})$.

Prueba. En $H_n(\mathbf{K})$ usamos, como siempre, la norma $\| \cdot \|$, lo que nos permite identificar $H_n(\mathbf{K})$ con el espacio $\mathbf{K}^{n+1}$, dotado de la norma

$$\| a \| = \sum_{i=0}^{n} | a_i | \quad , \quad a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}.$$

Sea A una matriz de orden m, como

$$\det (A) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1), 1} \cdots a_{\sigma(m), m},$$

donde σ recorre el conjunto de las permutaciones de $\{ 1, \ldots, m \}$, podemos considerar la función determinante como un polinomio de m^2 variables, y por lo tanto $A \longrightarrow \det (A)$ es una aplicación continua definida sobre $M_m(\mathbf{K})$ con valores en **K**. Por consiguiente, para cada entero p

de 1 a m, la aplicación $A \longrightarrow \tau_p(A)$ de $M_m(\mathbf{K})$ en $\mathbf{K}$ es continua, y por paso al producto cartesiano, la aplicación

$$A \longrightarrow ((-1)^m \tau_m(A), \ldots, \tau_2(A), -\tau_1(A), 1)$$

de $M_m(\mathbf{K})$ en $\mathbf{K}^{m+1}$, es continua; y como la inyección natural

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m) \longrightarrow (a_0, a_1, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0)$$

de $\mathbf{K}^{m+1}$ en $\mathbf{K}^{n+1}$ es continua, obtenemos la continuidad de la aplicación

$$A \longrightarrow (-1)^m ((-1)^m \tau_m(A), \ldots, -\tau_1(A), 1, 0, \ldots, 0)$$

de $M_m(\mathbf{K})$ en $\mathbf{K}^{n+1}$.

Esto completa la demostración.

Comentario. Este lema puede probarse de otras maneras. Por ejemplo, usando el método de Leverrier para la determinación de los coeficientes del polinomio característico:

Sea $P_A(z) = (-1)^m [z^m - p_1 z^{m-1} - p_2 z^{m-2} - \ldots - p_m]$ el polinomio característico de una matriz A, cuyas raíces son $z_1, z_2, \ldots, z_m$, de las que algunas pueden ser iguales. Pongamos

$$s_k = \sum_{i=1}^{m} z_i^k.$$

Entonces por las fórmulas de Newton

$$k\, p_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \ldots - p_{k-1} s_1 \quad , \quad (k = 1, \ldots, m) \qquad [1]$$

Por lo tanto, si conocemos los números s_k, por recurrencia podemos obtener los coeficientes p_k.

Pero

$$s_1 = z_1 + z_2 + \ldots + z_m = tr(A),$$

siendo $tr(A)$, la traza de A, la suma de los elementos situados en la diagonal principal de A.

Además, como se ve fácilmente, las raíces características de A^k son $z_1^k, z_2^k, \ldots, z_m^k$. En consecuencia,

$$s_k = z_1^k + z_2^k + \ldots + z_m^k = tr(A^k).$$

Así, el proceso consiste en calcular sucesivamente las potencias de A, luego calcular sus trazas y, finalmente, resolver la recurrencia [1]. [(ref. 8), Sec. 47, Cap. 4].

Respecto a lo que nos interesa, como $s_1 = p_1$, teniendo en cuenta la recurrencia [1] bastará que probemos la continuidad de las aplicaciones $A \longrightarrow s_k$ $(k = 1, \ldots, m)$. Para ello, tengamos presente que la traza es una función escalar de matrices, continua, por ser un polinomio en los elementos de la matriz. Además, la aplicación $(A, B) \longrightarrow AB$ de $M_m(\mathbf{K}) \times \times M_m(\mathbf{K})$ en $M_m(\mathbf{K})$ es continua [(ref. 2), ejemplo núm. 2 de la Definición 9, § 3.7 del Cap. IX]; por consiguiente, la aplicación $A \longrightarrow A^k$ de $M_m(\mathbf{K})$ en $M_m(\mathbf{K})$ es continua, y por lo dicho antes $A \longrightarrow tr\,(A^k)$ es una función continua definida en $M_m(\mathbf{K})$ con valores en $\mathbf{K}$.

Proposición 3. *El teorema* 1 — **K** *implica el teorema* 2 — **K**.

Prueba. Consideremos, en primer lugar, que $n \geqslant m > 1$. Sea f un polinomio de grado m, digamos $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m$, con coeficientes de $\mathbf{K}$; supongamos dado un número real $\varepsilon > 0$. Queremos probar que existe un polinomio g, de grado m, con coeficientes de $\mathbf{K}$, y cuyas raíces son simples, tal que $\| f - g \| \leqslant \varepsilon$.

Consideremos la matriz de orden m

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -a_0/a_m \\ 1 & 0 & 0 \ldots 0 & -a_1/a_m \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 & -a_2/a_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 & -a_{m-1}/a_m \end{pmatrix}$$

F tiene por polinomio característico

$$P_F(z) = (-1)^m \frac{1}{a_m} f(z),$$

lo que se comprueba fácilmente. A la matriz F se le llama matriz compañera (Frobenius) del polinomio

$$\frac{1}{a_m} f(z).$$

Utilizando el lema 2 — **K**, deducimos, por la continuidad de la aplicación $A \longrightarrow P_A$ en F, que existe un número real $\delta > 0$, tal que

$$\| P_F - P_B \| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a_m|} \qquad [1]$$

siempre que $\| F - B \| \leqslant \delta$ y $B \in M_m(\mathbf{K})$. En cuyo caso, de [1], teniendo en cuenta la definición de F, se obtiene que

$$\left\| (-1)^m \frac{1}{a_m} f - P_B \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a_m|}, \qquad [2]$$

y multiplicando a ambos miembros de la desigualdad [2] por $|(-1)^m a_m|$, se deduce que

$$\| f - (-1)^m a_m P_B \| \leqslant \varepsilon.$$

Si tomamos B con raíces características simples —lo que es posible por el teorema 1 — **K**— se sigue que el polinomio $g = (-1)^m a_m P_B$ tiene sus raíces simples y, evidentemente, es de grado m con coeficientes de **K**. Esto completa la demostración si $m > 1$.

En cuanto al caso $m = 1$, es fácil la prueba:

Sea $f(z) = a_0 + a_1 z$ un polinomio de grado 1 con coeficientes de **K**. f tiene únicamente la raíz

$$z_1 = -\frac{a_0}{a_1},$$

que por lo tanto es simple. Así, pues, $G_1(\mathbf{K}) = S_1(\mathbf{K})$ y esto completa la demostración.

Ahora pasaremos a probar que el teorema 2 — **K** implica el teorema 1 — **K**. Con este fin damos el siguiente

Lema 3 — **K**. *Sea* $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{m-1} z^{m-1} + a_m z^m$ *un polinomio con coeficientes de* **K**, *de grado* m; *y consideremos la matriz*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0/a_m \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1/a_m \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2/a_m \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{m-1}/a_m \end{pmatrix}.$$

Entonces la correspondencia $f \longrightarrow F$ *es una aplicación continua,* Φ_m, *del espacio topológico* $G_m(\mathbf{K})$ *en el espacio* $M_m(\mathbf{K})$.

Prueba. Como grado $(f) = m$ *se tiene que* $a_m \neq 0$. Identifiquemos $M_m(\mathbf{K})$ con $\mathbf{K}^{m^2}$, y $G_m(\mathbf{K})$ con el subconjunto $\{(a_0, a_1, \ldots, a_m) \in \mathbf{K}^{m+1} \mid a_m \neq 0\}$ de $\mathbf{K}^{m+1}$. Así

$$F \equiv \left(0, 0, \ldots, 0, \frac{-a_0}{a_m}, 1, 0, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, 0, \frac{-a_1}{a_m}, \ldots\ldots, 0, 0, \ldots, 1, \frac{-a_{m-1}}{a_m}\right).$$

Por otro lado, las aplicaciones de $G_m(\mathbf{K})$ en **K**:

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m) \longrightarrow -a_0/a_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_m) \longrightarrow -a_{m-1}/a_m,$$

son continuas; luego, por paso al producto cartesiano. la aplicación $f \longrightarrow F$ es continua.

Esto completa la demostración.

Proposición 4.—El teorema 2 — $\mathbb{K}$ implica el teorema 1 — $\mathbb{K}$.

Para demostrar esta afirmación usaremos el corolario 3 — $\mathbb{K}$ del teorema 2 — $\mathbb{K}$, el lema 3 — $\mathbb{K}$, y la reducción de matrices a la forma normal natural [(ref. 3), Cap. IV. § 60], que, como es sabido, es una forma normal a la que puede reducirse la matriz en el cuerpo del que se tomaron sus elementos.

Prueba. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, y un número real $\varepsilon > 0$, queremos probar que existe $D \in M_n(\mathbb{K})$ con raíces características distintas tal que $\| A - D \| \leqslant \varepsilon$.

Para ello consideremos los factores invariantes $1, \ldots, 1, f_1(z), \ldots, f_s(z)$ de la matriz A; donde $f_i(z)$ divide a $f_{i+1}(z)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, s-1$, como es conocido.

Ahora, para cada polinomio $f_i(z) = a_{i0} + a_{i1} z + \ldots + a_{i\, m_i-1} z^{m_i-1} + z^{m_i}$ consideremos su matriz compañera (Frobenius):

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ldots 0 & -a_{i0} \\ 1 & 0 \ldots 0 & -a_{i1} \\ 0 & 1 \ldots 0 & -a_{i2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 & -a_{i,\, m_i-1} \end{pmatrix}.$$

Sea B la matriz diagonal en bloques que tiene por bloques diagonales a $B_1, \ldots, B_s$:

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_s} \end{pmatrix}.$$

La matriz B es la forma normal natural a la que se reduce la matriz A; A es semejante a B, por lo que existe una matriz regular $T \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $A = T\, B\, T^{-1}$.

Como T es regular, se tiene que $T \neq 0$ y $T^{-1} \neq 0$; por lo tanto

$$\| T \| \neq 0 \quad \text{y} \quad \| T^{-1} \| \neq 0.$$

Para cada entero $i \in \{ 1, \ldots, s \}$, consideremos la aplicación continua Φ_{m_i} de $G_{m_i}(\mathbb{K})$ en $M_{m_i}(\mathbb{K})$ definida en el lema 3 — $\mathbb{K}$; por la continuidad de Φ_{m_i} existe un número real $\delta_i > 0$, tal que

$$\| B_i - \Phi_{m_i}(g_i) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{s} \quad \frac{1}{\| T \| \quad \| T^{-1} \|} \qquad [1]$$

siempre que $\| f_i - g_i \| < \delta_i$, $g_i \in G_{m_i}(\mathbb{K})$.

Con el uso del corolario 3 — **K** del teorema 2 — **K** vamos a hacer, para cada entero i, una elección adecuada (a nuestros propósitos) del polinomio $g_i \in G_{m_i}(\mathbf{K})$. Por el teorema 2 — **K** existe un polinomio $g_1 \in S_{m_1}(\mathbf{K})$ tal que $\| f_1 - g_1 \| < \delta_1$. Este polinomio tiene sus raíces simples que, en general, son números complejos $v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{m_1,1}$. Usando ahora el corolario 3 — **K** citado, podemos encontrar un polinomio $g_2 \in S_{m_2}(\mathbf{K})$, cuyas raíces, simples $v_{12}, v_{22}, \ldots, v_{m_2,2}$, son distintas de las de g_1, y tal que $\| f_2 - g_2 \| < \delta_2$.

En general, procediendo por inducción sobre i, si hemos elegido $g_1, g_2, \ldots, g_i$, tales que $\| f_1 - g_1 \| < \delta_1$, $\| f_2 - g_2 \| < \delta_2, \ldots, \| f_i - g_i \| > I_i$, y que las raíces —todas ellas simples— de $g_1, g_2, \ldots, g_i$ sean distintas entre sí, podemos, por el corolario 3 — **K**, elegir un polinomio $g_{i+1} \in S_{m_{i+1}}(\mathbf{K})$ tal que $\| f_{i+1} - g_{i+1} \| < \delta_{i+1}$ y $g_{i+1}(z) \neq 0$ para todo $z \in F$, siendo

$$F = \{ v_{11}, \ldots, v_{m_1,1}, v_{12}, \ldots, v_{m_2,2}, \ldots, v_{1i}, \ldots, v_{m_i,i} \}$$

el conjunto unión

$$g_1^{-1}(0) \cup g_2^{-1}(0) \cup \ldots \cup g_i^{-1}(0).$$

Una vez elegidos, de este modo, los polinomios $g_1, g_0, \ldots, g_s$, llamemos C a la matriz diagonal en bloques, cuyos bloques diagonales son $C_1 = \Phi_{m_1}(g_1)$, $C_2 = \Phi_{m_2}(g_2), \ldots, C_s = \Phi_{m_s}(g_s)$:

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{C_1} & & & \\ & \boxed{C_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_s} \end{pmatrix}.$$

Para cualquier matriz X recordamos que denotamos su polinomio característico, *det* (X — z I), así:

$$P_X(z)$$

Es fácil ver que $P_C(z) = P_{C_1}(z)\, P_{C_2}(z) \ldots P_{C_s}(z)$ [(ref. 9), pág. 439. Remarque 4, núm. 7 del § 34]. Por otra parte, si b_i es el coeficiente del término de mayor grado de g_i. se tiene que

$$P_{C_i}(z) = (-1)^{m_i} \frac{1}{b_i} g_i(z),$$

luego, si $g_i(z)$ tiene sus raíces simples, lo mismo le ocurre al polinomio característico $P_{C_i}(z)$ de C_i; como el conjunto de raíces características de C es $g_1^{-1}(0) \cup \ldots \cup g_s^{-1}(0)$ y $g_i^{-1}(0) \cap g_j^{-1}(0) = \emptyset$ si $1 \leqslant i < j \leqslant s$, deducimos que C tiene sus raíces características simples.

Observemos ahora la aproximación de C a B.

$$|| B - C || = \sum_{i=1}^{s} || B_i - C_i || ,$$

y por [1]

$$\sum_{i=1}^{s} || B_i - C_i || \leqslant \varepsilon \frac{1}{|| T || \quad || T^{-1} ||} .$$

Viendo la relación de A con B, definimos la matriz $D = T\,C\,T^{-1}$, cuyas raíces características son simples, pues son las de C.

Finalmente, deducimos la aproximación

$$|| A - D || = || T\,B\,T^{-1} - T\,C\,T^{-1} || = || T(B - C)\,T^{-1} || \leqslant \\ || T || \quad || B - C || \quad || T^{-1} || .$$

Por consiguiente,

$$|| A - D || \leqslant || T || \frac{\varepsilon}{|| T || \quad || T^{-1} ||} || T^{-1} || = \varepsilon .$$

Esto completa la demostración.

Si observamos la anterior demostración, vemos que, siempre basados en el corolario 3 — **K** del teorema 2 — **K**, puede obtenerse el siguiente resultado más general:

Proposición 5.—*Sea* F *un subconjunto finito del plano complejo. Dada* $A \in M_n(\mathbf{K})$, y *un número real* $\varepsilon > 0$, existe $D \in M_n(\mathbf{K})$ *con raíces características distintas, ninguna de las cuales pertenece a* F, *tal que* $|| A - D || \leqslant \varepsilon$.

Observemos que, cuando F es el conjunto vacío, esta proposición se reduce al teorema 1 — **K**.

Corolario 1.—*Dada* $A \in M_n(\mathbf{K})$, y *un número real* $\varepsilon > 0$, existe $D \in M_n(\mathbf{K})$ *con raíces características distintas, no singular, tal que* $|| A - D || \leqslant \varepsilon$.

Prueba. Basta poner $F = \{ 0 \}$ en la proposición 5, pues $det(D) = \lambda_1 \ldots \lambda_n$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son las raíces características de D.

Vimos otra prueba del caso complejo de este corolario en el corolario 1 — **C** del teorema 1 — **K**.

Corolario 2.—*En* $M_n(\mathbf{K})$, *el grupo lineal* $GL(n, \mathbf{K})$ *de matrices no singulares es un subconjunto denso.*

Prueba. Sea Δ el conjunto de matrices no singulares de $M_n(\mathbf{K})$, con raíces características distintas. Por el corolario 1 se tiene $\overline{\Delta} = M_n(\mathbf{K})$; pero $\Delta \subset GL\,(n, \mathbf{K})$, luego $\overline{GL\,(n, \mathbf{K})} = M_n(\mathbf{K})$.

Esto completa la demostración.

Otra demostración de este resultado, aunque basada en el mismo principio, para los casos real y complejo puede verse en la referencia 2 (proposición 6, § 1.6 del Cap. VI, y § 4.2. del Cap. VIII).

VI Aplicaciones.

Indicaremos, finalmente, algunas aplicaciones, entre otras, de los teoremas 1 — **K** y 2 — **K**.

El teorema 1 — **K** se usa para reducir, por un argumento de continuidad, la prueba de resultados referentes a matrices generales a la de. mostración del correspondiente resultado para matrices diagonalizables- Así, por ejemplo, el teorema de Hamilton-Cayley («toda matriz es un cero de su polinomio característico»), fácil de probar cuando la matriz es diagonalizable, se demuestra en el gaso general, usando el teorema 1—**K**, a partir del caso diagonalizable; una prueba, concisa por su autor, puede verse en el libro de Bellman (ref. 1).

Podemos precisar algunos teoremas sobre aproximación uniforme por polinomios sobre conjuntos compactos utilizando el teorema 2 — **K**.

Así, el clásico teorema de aproximación de Weierstrass y el teorema 2 — **K** (**K** = **R** o **C**) permiten enunciar:

Teorema.—Sea f *una función real* (resp. compleja) *continua en el intervalo* $[a, b]$ *de la recta real; dado un número* $\varepsilon > 0$, *se puede encontrar un polinomio* P *con coeficientes reales* (*resp. con coeficientes complejos*), *cuyas raíces son simples, tal que* $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$ *para todo* $x \in [a, b]$.

En efecto, por el teorema de Weierstrass podemos encontrar un polinomio P_1 con coeficientes reales (resp. con coeficientes complejos), tal que $| f(x) - P_1(x) | < \varepsilon/_2$ para todo $x \in [a, b]$.

Sea m el grado de P_1. Tomemos un entero positivo n, mayor que m. Sea el conjunto $E = [a, b]$ y normemos $H_n(\mathbf{R})$ (resp. $H_n(\mathbf{C})$) con la norma

$$|| P ||_E = \sup_{x \in E} | P(x) | ;$$

entonces por el corolario 2 — **R** del teorema 2 — **R** (resp. cor. 2 — **C** del teorema 2 — **C**), podemos encontrar un polinomio $P \in H_n(\mathbf{R})$ (resp. $P \in H_n(\mathbf{C})$), de grado $\geqslant 1$, cuyas raíces son simples, tal que

$$|| P_1 - P ||_E < \varepsilon/_2.$$

Por consiguiente

$$| f(x) - P(x) | < \varepsilon \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Esto completa la demostración.

Finalmente, por citar un ejemplo de variable compleja, nos referiremos al teorema de Mergelyan [(ref. 7), teorema 20.5], cuyo enunciado es: *Si* K *es un conjunto compacto del plano complejo cuyo complemento es conexo, si* f *es una función compleja continua sobre* K *que es holomorfa* *en el interior de* K, *y si* $\varepsilon > 0$, *entonces existe un polinomio* P *con coeficientes complejos tal que* $| f(z) - P(z) | < \varepsilon$ *para todo* $z \in K$.

Este teorema, junto con el corolario 2 — C del teorema 2 — C, nos permiten afirmar, por una prueba análoga a la anterior, que:

Teorema.—Si E *es un conjunto compacto infinito del plano complejo cuyo complemento es conexo, si* f *es una función compleja continua sobre* E *que es holomorfa en el interior de* E, *y si* $\varepsilon > 0$, *entonces existe un polinomio* P *con coeficientes complejos, cuyas raíces son simples, tal que* $| f(z) - P(z) | < \varepsilon$ *para todo* $z \in E$.

REFERENCIAS

1. R. Bellman: *Introducción al análisis matricial.* (Versión española por J. J. Etayo.) Reverté. Barcelona, 1965.
2. N. Bourbaki: *General Topology.* Part 2. Hermann. París, 1966.
3. A. I. Maltsev: *Fundamentos de álgebra lineal.* Siglo XXI Editores, Sociedad Anónima. México, 1970.
4. F. R. Gantmacher: *Théorie des matrices.* Tome 1. Dunod. París, 1966.
5. B. L. Van der Waerden: *Modern Algebra.* Volume 1. Frederick Ungar Publishing Co. New York, 1966 (Capítulo IV).
6. J. Dieudonne: *Calcul Infinitésimal.* Hermann. París, 1968. (Capítulo II, Apéndice.)
7. W. Rudin: *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill. New York, 1970.
8. D. K. Faddeev y V. N. Faddeeva: *Computational Methods of Linear Algebra.* W. H. Freeman and Company. San Francisco, 1963.
9. R. Godement: *Cours d'Algèbre.* Hermann. París, 2.ª ed., 1966.