# INTRODUCCION AL ESPACIO PROYECTIVO

por

VALERIANO ZORIO BLANCO

## NOTA

El presente trabajo tiene como finalidad destacar la génesis del espacio proyectivo. Es de un caracter propedéutico. Se intenta dar una justificación de los axiomas que se establecen en los tratados de geometría, cuando se estudia el espacio proyectivo.

Consideramos que las ideas que se exponen a continuación, basándose en la geometría intuitiva elemental, son muy útiles cuando se avanza en el estudio de la geometría proyectiva, pues permiten comprender la razón de muchos formalismos que dicen muy poco por sí solos, dado su carácter puramente algebraico y la falta de interpretación física del espacio de $n$ dimensiones.

Se pretende enlazar los conocimientos elementales de geometría, con los que se accede a la Universidad, y la geometría avanzada que entendemos por geometría proyectiva.

## 1. RECTA PROYECTIVA

Consideremos el haz de rectas de vértice V y la recta $r$, que no pertenece al haz. Entre el conjunto de rectas de vértice V, *excluida* la paralela a $r$, y el conjunto de puntos de $r$ se puede establecer una biyección

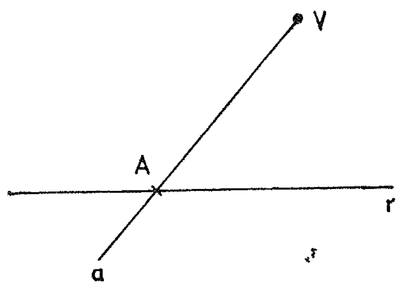


Fig. 1

haciendo corresponder a cada recta su punto de corte, y a cada punto de $r$ la recta del haz que pasa por el punto.

Para que esta biyección exista entre el conjunto de rectas de vértice V incluida la paralela a $r$, añadimos a la recta $r$ un punto especial que llamaremos punto del infinito o punto impropio. Este punto, en cierto modo, se puede definir como el punto de intersección de $r$ con su paralela por V.

En el plano euclídeo decíamos que dos rectas son paralelas cuando no se cortan; ahora parece un absurdo decir que el punto que añadimos a $r$ es el de intersección de $r$ con una paralela. Lo que hemos hecho es completar la recta $r$ con un nuevo punto para no tener que distinguir entre paralelas y no paralelas.

La recta ampliada que resulta de añadir a la recta afín (o euclídea) el punto impropio se llama *recta proyectiva.*

## 2. Referencia de coordenadas en la recta proyectiva

Cada punto de la recta viene determinado biunívocamente por una recta del haz de vértice V. A su vez, cada recta del haz de vértice V viene definida por cualquier vector del plano que sea paralelo a la recta. Sabemos que todos los vectores del plano que tienen una misma dirección forman una recta vectorial, es decir, un espacio vectorial de dimensión uno. Luego cada recta de vértice V viene determinada biunívocamente por una recta vectorial del plano.

Luego:

Existe una biyección entre los puntos de la recta proyectiva. y las rectas vectoriales del plano.

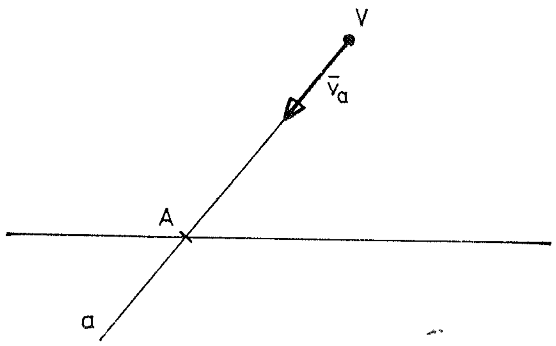


**Fig. 2**

$$A \xleftrightarrow{\text{biyeccion}} a \xrightarrow{\text{biyección}} \{ \lambda \bar{v}_a \mid \lambda \in \mathbf{R} \}$$

$$A \xleftrightarrow[\text{biyección}]{} \{ \lambda \bar{v}_a \mid \lambda \in \mathbf{R} \}$$

Las anteriores biyecciones nos permiten identificar elementos. Podemos considerar sinónimos los conceptos:

1) Punto de la recta proyectiva.
2) Recta del haz de vértice V.
3) Recta vectorial de $V_2$.

Para determinar un punto A de la recta proyectiva basta con determinar la recta vectorial que le corresponde. Y sabemos que una recta vectorial está determinada por uno cualquiera de sus vectores, por ejemplo, el $\overline{v_a}$.

Fijémonos en la figura. Consideremos fijas las rectas $u_1$, $u_2$. En cada una de las rectas fijamos un vector $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$, respectivamente.

$\overline{v_1}$ se puede considerar como una base de la recta vectorial que tiene la dirección de la recta $u_1$.

$\overline{v_2}$, una base análoga para $u_2$.

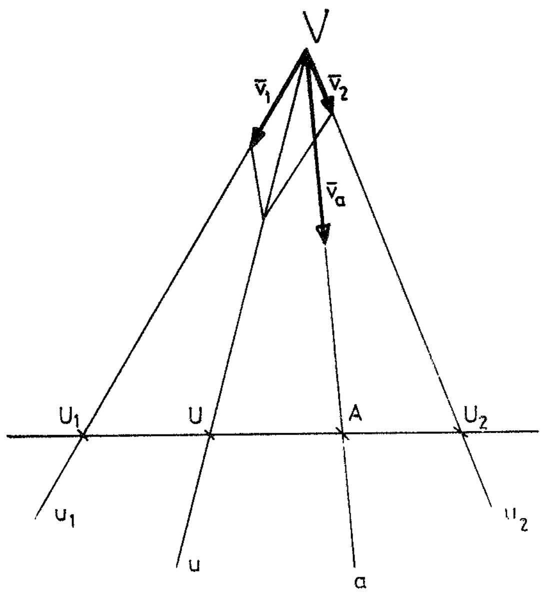


**Fig. 3**

Cualquier recta $a$ viene determinada por un vector $\overline{v_a}$ contenido en ella. A su vez, el vector $\overline{v_a}$ viene definido por el par de números $(x_1, x_2)$, tales que $\overline{v_a} = x_1 \overline{v_1} + x_2 \overline{v_2}$.

Si en vez de $\overline{v_a}$ hubiésemos tomado otro vector contenido en la recta, sería de la forma $\lambda \overline{v_a}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Luego las coordenadas del nuevo vector resultan $(\lambda x_1, \lambda x_2)$ en vez de $(x_1, x_2)$, es decir, valores proporcionales.

Si sobre las rectas $u_1$, $u_2$ tomamos $\mu\,\overline{v}_1$, $\mu\,\overline{v}_2$ como base, en vez de $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, las coordenadas de $\overline{v}_a$ hubiesen sido

$$\left(\frac{x_1}{\mu}, \frac{x_2}{\mu}\right)$$

pues

$$\overline{v}_a = x_1\,\overline{v}_1 + x_2\,\overline{v}_2 = \frac{x_1}{\mu}(\mu\,\overline{v}_1) + \frac{x_2}{\mu}(\mu\,\overline{v}_2).$$

$$\left(\frac{x_1}{\mu}, \frac{x_2}{\mu}\right)$$

son valores proporcionales a $(x_1, x_2)$.

Vemos entonces que cualquier vector que tomemos sobre la recta $a$ nos da valores proporcionales para sus coordenadas. Y cualquier base $(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ sobre las rectas $u_1$, $u_2$, respectivamente, ***tal que la resultante de sumar*** $\overline{v}_1$ ***y*** $\overline{v}_2$ ***por la regla del paralelogramo esté en la recta*** u, también nos da valores proporcionales para las coordenadas de cualquier vector de posición de la recta $a$.

Resumiendo: La recta $a$ viene determinada por un par de números $(x_1, x_2)$ o cualquiera de los infinitos pares proporcionales $(\rho\,x_1, \rho\,x_2)$ $\rho \in \mathbf{R}$, si suponemos fijadas las rectas $u_1$, $u_2$, $u$.

Podemos considerar que estas tres rectas forman una referencia de coordenadas de las rectas del haz, ya que, respecto de ellas, cualquier otra recta viene determinada por un par de números.

Puesto que existe una biyección entre los puntos de la recta proyectiva y las rectas del haz, podemos decir que cualquier punto de la recta proyectiva viene definido una vez fijados los puntos $U_1$, $U_2$, U.

El punto A que corresponde a la recta $a$ tiene de coordenadas proyectivas $(x_1, x_2)$ respecto de la referencia $R = \{ U_1, U_2; U \}$. Vale cualquier otro par proporcional $(\rho\,x_1, \rho\,x_2)$, $\rho \in \mathbf{R}$.

Segun dijimos:

$$U_1 \equiv u_1 \equiv \{ \lambda\,\overline{v}_1 / \lambda \in \mathbf{R} \}$$

$$U_2 \equiv u_2 \equiv \{ \lambda\,\overline{v}_2 / \lambda \in \mathbf{R} \}$$

Las bases $\overline{v}_1$ (base de $U_1$) y $\overline{v}_2$ (base de $U_2$) se dice que son normalizadas respecto de U en el sentido de que $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 \in U$. o lo que es igual

$$U \equiv u \equiv \{ \lambda(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) / \lambda \in \mathbf{R} \}$$

$U_1$ tiene de coordenadas $(\rho, 0)$, o lo que es igual $(1, 0)$.
$U_2$ tiene de coordenadas $(0, \rho)$, o lo que es igual $(0, 1)$.
U tiene de coordenadas $(\rho, \rho)$ ó $(1, 1)$.

El punto $U_1$ se llama en algunos libros *punto límite*, el $U_2$ *punto origen* y el U *punto unidad*.

3. Razones simple y doble de puntos alineados.

Dados tres puntos, A, B, C, situados sobre una misma recta, se llama *razón simple* a la expresión

$$\frac{AC}{BC}$$

y se escribe

$$(A\ B\ C) = \frac{AC}{BC}$$

Dados cuatro puntos, A, B, C, D, situados sobre una misma recta se llama *razón doble* de los cuatro puntos al cociente de las dos razones simples

$$\frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}}$$

y se escribe

$$(A\ B\ C\ D) = \frac{(A\ B\ C)}{(A\ B\ D)} = \frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

Prescindimos ahora de las propiedades de la razón doble; nos basta con su definición.

4. Interpretacion de las coordenadas proyectivas.

Por los puntos U y A trazamos paralelas a las rectas $u_1$, $u_2$.

Tomamos como base $\overline{v}_1 = \overrightarrow{V\ M_1}$; $\overline{v}_2 = \overrightarrow{V\ M_2}$.

Como coordenadas del punto A, las componentes del vector $\overrightarrow{VA}$, que llamaremos $(a_1, a_2)$.

(Nota: Adviértase que esto podemos hacerlo, puesto que las coordenadas proyectivas de A son las de un vector cualquiera de la recta $a$; en particular puede ser $\overrightarrow{VA}$. Además, la base vectorial $(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ puede ser cualquiera con tal de que la resultante $v_1 + v_2$ esté contenida en la recta $u$, lo cual ocurre en este caso).

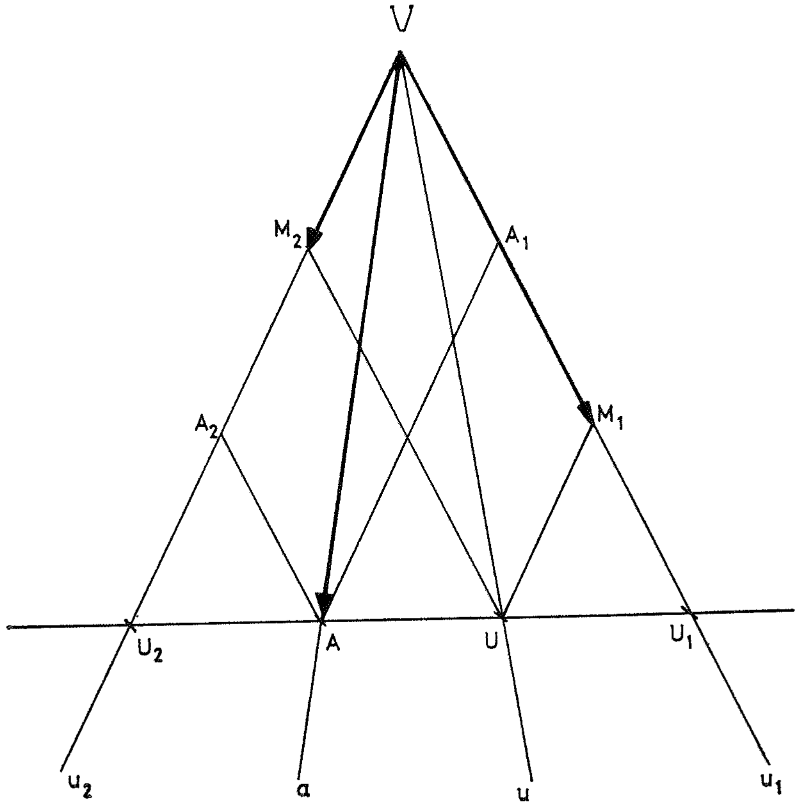


**Fig. 4**

$VA_1 = a_1 \cdot V\,M_1$, pues $a_1$ es la medida de $V\,A_1$ cuando se toma como unidad $V\,M_1$.

$V\,A_2 = a_2 \cdot V\,M_2$ por análoga razón.

$$\frac{V\,A_1}{V\,A_2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{V\,M_1}{V\,M_2} \Rightarrow \frac{V\,A_1}{V\,M_1} \cdot \frac{V\,M_2}{V\,A_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Pero, por el teorema de Thales, resulta

$$\frac{V\,A_1}{V\,M_1} = \frac{U_2\,A}{U_2\,U} \quad ; \quad \frac{V\,M_2}{V\,A_2} = \frac{U_1\,U}{U_1\,A}$$

de donde resulta

$$\frac{U_1\,U \cdot U_2\,A}{U_1\,A \cdot U_2\,U} = \frac{a_1}{a_2}$$

o sea

$$\boxed{(U_1\ U_2\ U\ A) = \frac{a_1}{a_2}}$$

Esto nos permite interpretar las coordenadas proyectivas, pues dado un punto A de coordenadas proyectivas $(a_1, a_2)$, respecto de la referencia proyectiva $R = \{ U_1\ U_2 ; U \}$, esto quiere decir que el punto A es tal que la razón doble $(U, U_2\ U\ A)$ vale

$$\frac{a_1}{a_2},$$

y recíprocamente.

De aquí deducimos, de momento, dos conclusiones.

1.ª Podemos determinar el punto en la recta proyectiva, conocidas sus coordenadas (proyectivas), pues se reduce a determinar el cuarto punto de una cuaterna, conocido el valor de la razón doble.

Determinemos el punto A, sabiendo que

$$(U_1\ U_2\ U\ A) = \frac{a_1}{a_2}$$

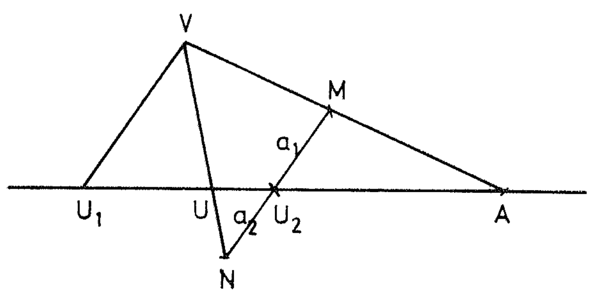


Fig. 5

Por el punto $w_2$ se traza una recta cualquiera y se llevan a un lado y otro longitudes proporcionales a $a_1$ y $a_2$, obteniéndose los puntos M y N.

Por $U_1$ se traza una paralela a la recta MN. Se une N con U y se obtiene V. La recta VM determina A.

*Demostración.*—Por semejanza de triángulos

$$\widehat{V U_1 A} \sim \widehat{M U_2 A} \Rightarrow \frac{V U_1}{a_1} = \frac{U_1 A}{U_2 A}$$

$$\widehat{V U_1 U} \sim \widehat{U U_2 N} \Rightarrow \frac{V U_1}{a_2} = \frac{U_1 U}{U_2 U}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\dfrac{V U_1}{a_2}}{\dfrac{V U_1}{a_1}} = \frac{\dfrac{U_1 U}{U_2 U}}{\dfrac{U_1 A}{U_2 A}} = \frac{U_1 U \cdot U_2 A}{U_2 U \cdot U_1 A} = (U_1\ U_2\ U\ A)$$

2.ª El sistema de referencia $R = \{ U_1\ U_2\ ;\ U \}$ determina las coordenadas de un punto A cualquiera de la recta *independientemente* del vértice V.

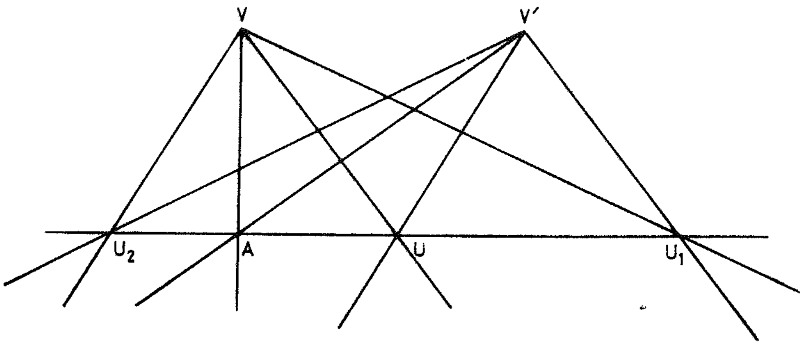


Fig. 6

Es decir, podíamos haber razonado con V' en vez de V.

*Ejercicio* 1.—Hallar las coordenadas proyectivas del punto A respecto de la referencia $R = \{ U_1\ U_2\ ;\ U \}$.

Solución:

$$(\underbrace{(U_1\ U_2\ U\ A)}_{a_1},\ \underbrace{1}_{a_2})$$

o bien

$$(\rho\ (U_1\ U_2\ U\ A),\ \rho)$$

para cualquier $\rho \in \mathbf{R}$.

*Ejercicio* 2.—Calcular las coordenadas del punto impropio respecto de

$$R = \{ U_1 \, U_2 \, ; \, U \}$$

Consideremos

$$(U_1 \, U_2 \, U \, \infty) = \frac{U_1 U \cdot U_2 \infty}{U_2 U \cdot U_1 \infty} = \frac{U_1 U}{U_2 U}$$

luego las coordenadas serán

$$\rho \left( \frac{U_1 U}{U_2 U} , 1 \right)$$

5. REFERENCIA DE COORDENADAS PROYECTIVAS COMO GENERALIZACION DE LA REFERENCIA EUCLIDEA.

Vamos a considerar el caso en que la recta $u_1$ sea paralela a $t$. en cuyo caso el punto límite $U_1$ es precisamente el punto impropio

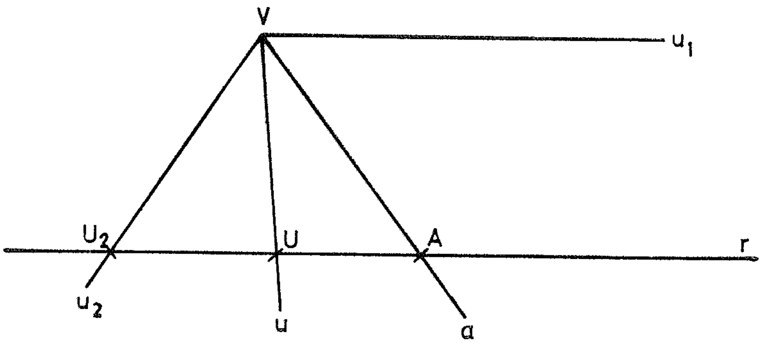


**Fig. 7**

*A* tiene de coordenadas proyectivas

$$(\rho \, (U_1 \, U_2 \, U \, A), \, \rho) \quad \rho \in \mathbf{R}$$

Como

$$(U_1 \, U_2 \, U \, A) = \frac{U_1 U \cdot U_2 A}{U_2 U \cdot U_1 A}$$

si $U_1$ se aleja de infinito, límite de

$$\frac{U_1 U}{U_1 A} = 1,$$

luego las coordenadas de A resultan

$$\rho\left(\frac{U_2 A}{U_2 U}, 1\right)$$

pero

$$\frac{U_2 A}{U_2 U}$$

es la coordenada cartesiana de la recta euclídea respecto de la referencia

$$R = \{ U_2 ; \overrightarrow{U_2 U} \}$$

es decir, con origen en $U_2$ y unidad en U.

En este caso el punto impropio coincide con el punto límite, luego sus coordenadas son $\rho$ (1, 0).

## 6. Plano proyectivo.

De un modo enteramente análogo al procedimiento seguido para la recta proyectiva, consideremos la radiación de rectas de vértice V y el plano $\pi$ que no pasa por V.

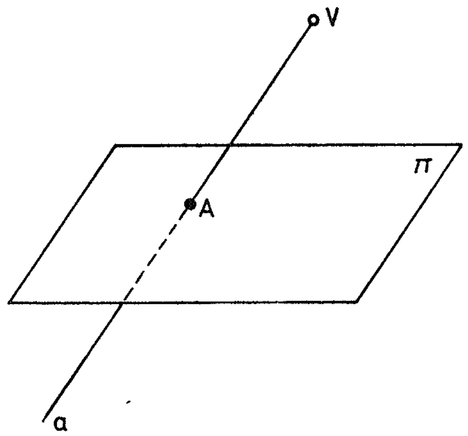


**Fig. 8**

Entre el conjunto de rectas de vértice V no paralelas a $\pi$, y el conjunto de puntos del plano, existe una biyección que se establece, haciendo corresponder a cada recta $a$ su punto de intersección A con $\pi$.

Si consideramos un plano $\alpha$ que pasa por **V**, no todas las rectas de la radiación, contenidas en $\alpha$, forman un haz; sus puntos correspondientes están situados en la recta de intersección $r$, de $\alpha$ y $\pi$. De esta manera establecemos una biyección entre el conjunto de rectas $r$ de $\pi$, y los planos $\alpha$ que pasan por V, excepto el plano paralelo por V a $\pi$. El conjunto de planos que pasan por un punto forman lo que se llama una radiación de planos.

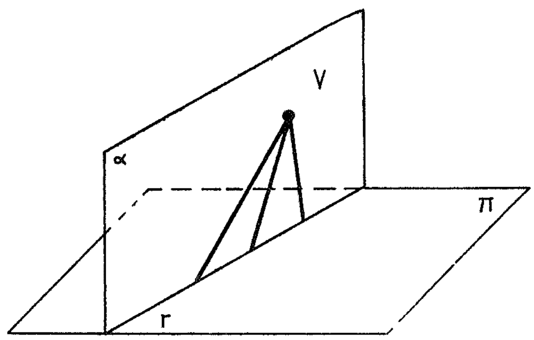


**Fig. 9**

Hemos establecido una biyección entre el conjunto de puntos del plano $\pi$, y la radiación de rectas de vértice V, *excluidas* las paralelas al plano $\pi$, que forman un haz. Análogamente, hemos establecido una biyección entre el conjunto de rectas del plano $\pi$, y la radiación de planos de vértice V, *excluido* el plano paralelo a $\pi$.

Para evitar estas restricciones, vamos a añadir una nueva recta al plano $\pi$, que llamaremos *recta impropia* o recta del infinito y que podemos interpretar como la recta intersección entre el plano $\pi$ y su paralelo por V.

Al ente matemático que resulta de añadir al plano euclídeo esta nueva recta le llamaremos *plano proyectivo.*

De esta manera existe una biyección entre el conjunto de puntos del plano proyectivo y la radiación de rectas de vértice V; existe una biyección entre el conjunto de rectas del plano proyectivo y la radiación de planos de vértice V.

A cada recta o plano que pasa por V le hacemos corresponder su intersección con $\pi$.

## 7. Referencia de coordenadas en el plano proyectivo.

Cada punto del plano proyectivo viene determinado biunívocamente por una recta de la radiación de vértice V.

A su vez, cada recta de la radiación viene determinada biunívocamente por uno cualquiera de los vectores que tengan su dirección; es decir, existe una biyección entre las rectas de la radiación y las rectas vectoriales (variedades lineales de dimensiún 1) de $V_3$.

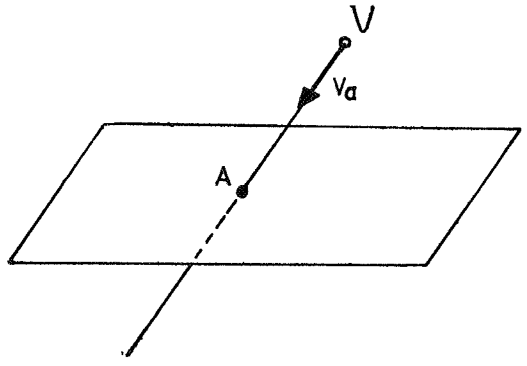


Fig. 10

Existe, por lo tanto, una biyección entre los puntos del plano proyectivo y las rectas vectoriales de $V_3$.

$$A \xleftrightarrow{\text{biyección}} a \xleftrightarrow{\text{biyección}} \{ \lambda \overline{v_a} \;/\; \lambda \in \mathbf{R} \}$$

$$A \xleftrightarrow[\text{biyección}]{\hspace{4cm}} \{ \lambda \overline{v_a} \;/\; \lambda \in \mathbf{R} \}$$

Las biyecciones anteriores nos permiten identificar elementos. Es decir, consideraremos como equivalentes:

1) Punto del plano proyectivo.
2) Recta de la radiación de vértice V.
3) Recta vectorial de $V_3$.

Para determinar un punto A del plano proyectivo basta con determinar la recta vectorial que le corresponde, y una recta vectorial está determinada por uno cualquiera de sus vectores, por ejemplo, $\overline{v_a}$.

Consideremos fijas las rectas no coplanarias $u_1$, $u_2$, $u_3$. En cada una de las rectas fijamos un vector; sean $\overline{v_1}$ $\overline{v_2}$ $\overline{v_3}$, respectivamente.

Cada uno de estos vectores puede considerarse una base de la correspondiente recta vectorial. O sea, $\overline{v_1}$ base de la recta vectorial que tiene la dirección de $u_1$; análogamente, para $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$. Cualquier recta $a$ viene determinada por un vector $\overline{v_a}$ que tenga su dirección. Como las rectas $u_1$, $u_2$, $u_3$ no son coplanarias, resulta que los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$ forman una base de $V_3$; luego cualquier vector $\overline{v_a}$ de $V_3$ viene definido por la terna de números $(x_1\ x_2\ x_3)$, tales que $\overline{v_a} = x_1 \overline{v_1} + x_2 \overline{v_2} + x_3 \overline{v_3}$.

Si en vez de $\overline{v_a}$ hubiésemos tomado otro vector contenido en la recta $a$, sería de la forma $\lambda \overline{v_a}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Para este nuevo vector las coordenadas resultarían $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ en vez de $(x_1, x_2, x_3)$, es decir, valores proporcionales.

Vamos a suponer que en vez de $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$ tomamos como base $(\mu\, \overline{v}_1, \mu\, \overline{v}_2, \mu\, \overline{v}_3)$; las coordenadas de $v_a$, en este caso, serían

$$\left(\frac{x_1}{\mu}, \frac{x_2}{\mu}, \frac{x_3}{\mu}\right)$$

puesto que

$$\overline{v_a} = x_1\, \overline{v}_1 + x_2\, \overline{v}_2 + x_3\, \overline{v}_3 =$$

$$= \frac{x_1}{\mu}(\mu\, \overline{v}_1) + \frac{x_2}{\mu}(\mu\, \overline{v}_2) + \frac{x_3}{\mu}(\mu\, \overline{v}_3)$$

Los valores

$$\left(\frac{x_1}{\mu}, \frac{x_2}{\mu}, \frac{x_3}{\mu}\right)$$

son proporcionales a $(x_1, x_2, x_3)$.

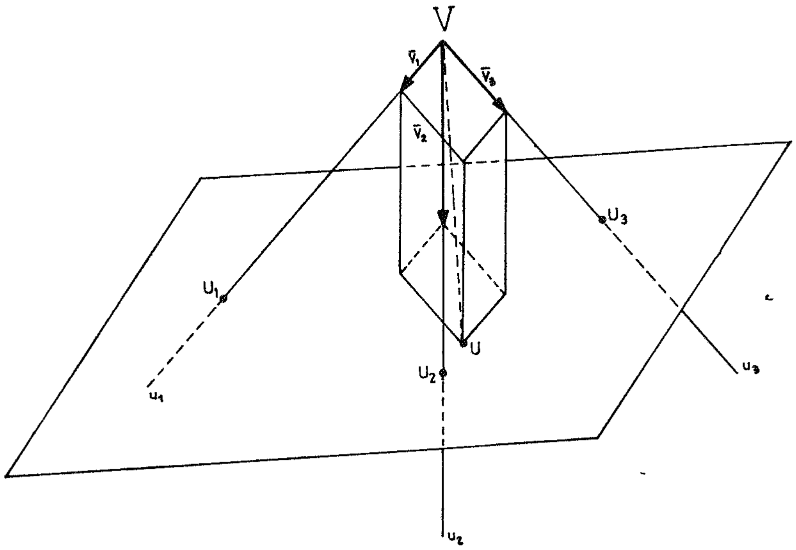


**Fig. 11**

Vemos entonces que cualquier vector que tomemos sobre la recta $a$ nos da valores proporcionales para sus coordenadas. Y cualquier base $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$, *tal que la resultante de sumar* $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ *y* $\overline{v}_3$ *esté sobre la recta* u, también nos da valores proporcionales para las coordenadas de cualquier vector que tenga la dirección de $a$.

Las bases $\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$ de las rectas $u_1$, $u_2$, $u_3$, tales que su suma tenga la dirección de la recta $u$, se llaman bases normalizadas.

Resumen: La recta $a$ viene determinada por una terna de números $(x_1, x_2, x_3)$ o cualquiera de las infinitas ternas proporcionales $(\rho\, x_1,\ \rho\, x_2\ \rho\, x_3)$ $\rho \in \mathbf{R}$, si suponemos fijadas las rectas $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u$.

Estas cuatro rectas podemos considerar que forman una referencia de coordenadas de las rectas de la radiación, ýa que cualquier otra viene determinada por una terna de números.

Puesto que existe una biyección entre los puntos del plano proyectivo y las rectas de la radiación podemos decir que cualquier punto del plano proyectivo viene definido una vez fijados los puntos $U_1$ $U_2$ $U_3$ U.

El punto A que corresponde a la recta $a$ tiene de coordenadas proyectivas $(x_1\ x_2\ x_3)$, respecto de la referencia $R = \{ U_1\ U_2\ U_3\ ;\ U \}$.

Como hemos visto vale cualquier terna proporcional $(\rho\, x_1,\ \rho\, x_2,\ \rho\, x_3)$, $\rho \in \mathbf{R}$.

Es inmediato que

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $U_1$ | tiene | de | coordenadas | (1, 0, 0) |
| $U_2$ | » | » | » | (0, 1, 0) |
| $U_3$ | » | » | » | (0, 0, 1) |
| U | » | » | » | (1, 1, 1) |

o valores proporcionales.

8. Interpretacion de las coordenadas proyectivas del plano.

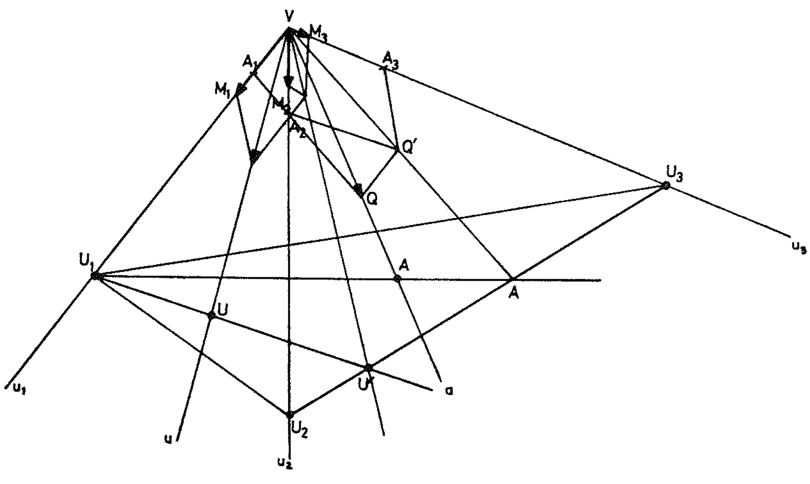


**Fig. 12**

Consideremos la referencia $R = \{U_1\ U_2\ U_3\ ;\ U\}$. Las coordenadas de un punto A serán las componentes $(a_1\ a_2\ a_3)$ de un vector contenido en la recta VA, por ejemplo, el $\overrightarrow{VQ}$

$$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{VA_1} + \overrightarrow{VQ'}$$

siendo Q′ la proyección de Q sobre el plano V $U_2$ $U_3$ paralelamente a la recta $u_1$. A su vez,

$$\overrightarrow{VQ'} = \overrightarrow{VA_2} + \overrightarrow{VA_3}$$

luego

$$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{VA_1} + \overrightarrow{VA_2} + \overrightarrow{VA_3} = a_1\,\overrightarrow{VM_1} + a_2\,\overrightarrow{VM_2} + a_3\,\overrightarrow{VM_3}$$

puesto que

$$a_1 = \frac{V\,A_1}{V\,M_1}\,,\ a_2 = \frac{V\,A_2}{V\,M_2}\,,\ a_3 = \frac{V\,A_3}{V\,M_3}$$

En el plano V $U_2$ $U_3$ las coordenadas de $\overrightarrow{VQ'}$ respecto de la base ($\overrightarrow{V\,M_2}$, $\overrightarrow{V\,M_3}$), o lo que es lo mismo ($\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$) es ($a_2$, $a_3$), o sea al considerar la recta proyectiva determinada por los puntos $U_2$ $U_3$ podemos decir que las coordenadas de A′ respecto de la referencia R = { $U_2$ $U_3$ ; U′ } son ($a_1$, $a_3$).

Análogamente, si proyectamos A y U sobre la recta $U_1$ $U_3$ desde el punto $U_2$, tendremos los puntos U″ y A″, y resulta que las coordenadas de A″ respecto de la referencia R = { $U_1$, $U_3$ ; U″ } son ($a_1$, $a_3$).

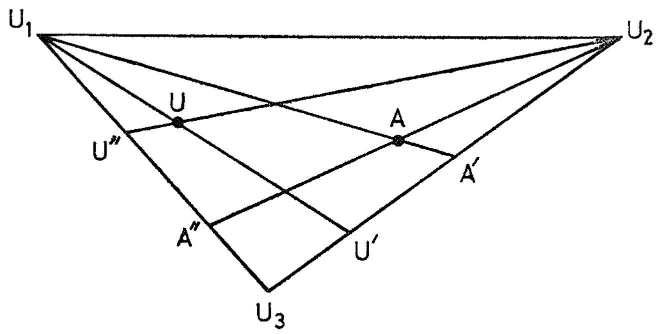


**Fig. 13**

Al estudiar la recta proyectiva hemos visto que

$$\frac{a_1}{a_3} = (U_1\,U_3\,U''\,A'')$$

$$\frac{a_2}{a_3} = (U_2\,U_3\,U'\,A')$$

*Ejercicio* 1.—Dado el punto A, hallar sus coordenadas proyectivas respecto de la referencia

$$R = \{ U_1, U_2, U_3 ; U \}$$

Solución: Se proyecta U y A desde $U_1$ y $U_2$ sobre los lados opuestos, determinando así los puntos U′, A′, U″, A″; las coordenadas de A son

$$\rho\, (a_1\; a_2\; a_3)$$

o bien

$$\rho \left( \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}, 1 \right) = \rho( (U_1\, U_3\, U''\, A''), (U_2\, U_3\, U'\, A'), 1)$$

*Ejercicio* 2.—Dado el punto de coordenadas proyectivas $(a_1, a_2, a_3)$, respecto de la referencia $R = \{ U_1, U_2, U_3 ; U \}$, determinar la posición del punto con regla y compás.

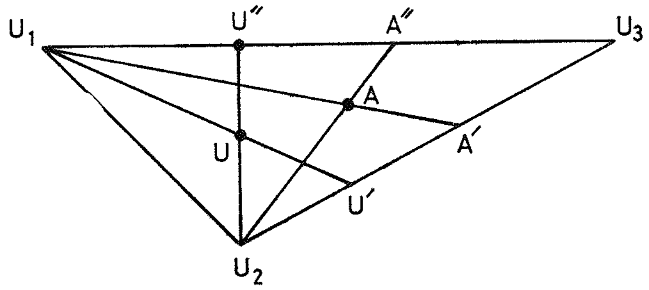


**Fig. 14**

Determinamos U′ y U″ según se ve en la figura. Como

$$\frac{a_1}{a_3} = (U_1\, U_3\, U''\, A'')$$

podemos construir A″, ya que conocemos tres puntos $U_1$ $U_3$ U″ y el valor de la razón doble

$$\frac{a_1}{a_3}$$

(ya se hizo este ejercicio al tratar de la recta). Análogamente se verifica

$$\frac{a_3}{a_3} = (U_2\, U_3\, U'\, A'),$$

lo que nos permite determinar A′. El punto A que buscamos será la intersección de las rectas $U_1$ A′ y $U_2$ A″.

### 9. Referencia del plano euclídeo como caso particular de la referencia proyectiva.

Vamos a considerar ahora que dos rectas de la base son paralelas al plano, por ejemplo, $u_1$ y $u_2$.

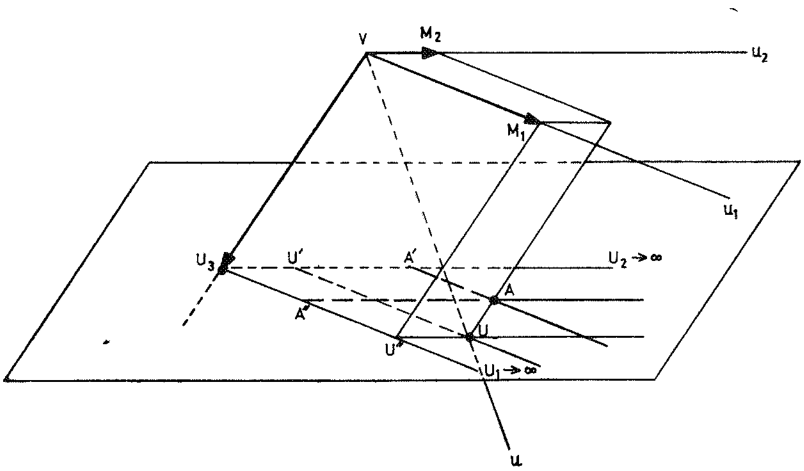


Fig. 15

En este caso, $U_1$ y $U_2$ son puntos impropios; proyectar desde $w_2$ el punto U para obtener U'' es equivalente a trazar por U la paralela a $U_3 U_2$. Análogamente U' se obtiene trazando por U la paralela a $U_3 U_1$.

Un punto A cualquiera tiene de coordenadas

$$\rho\left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}, 1\right) = \rho( (\infty\ U_3\ U''\ A'') , (\infty\ U_3\ U'\ A'), 1)$$

o sea

$$\rho\left(\frac{U_3 A''}{U_3 U''}, \frac{U_3 A'}{U_3 U'}, 1\right)$$

y se ve fácilmente que

$$\left(\frac{U_3 A''}{U_3 U''}, \frac{U_3 A'}{U_3 U'}\right)$$

son las coordenadas cartesianas de A respecto de la referencia

$$R = \{ U_3 ; \overrightarrow{U_3 U''} , \overrightarrow{U_3 U'} \}$$

*Ejercicio.*—Determinar la forma de las coordenadas de un punto impropio del plano. Sol: Si el punto es impropio, la recta ha de ser paralela al plano, luego cualquier vector contenido en la recta tendrá la tercera componente nula, y por lo tanto las coordenadas serán de la forma

$$\rho\,(a_1,\ a_2,\ 0).$$

Advertencia: Los puntos impropios se caracterizan por tener la tercera coordenada nula *solamente* cuando las rectas $u_1$, $u_2$ son paralelas al plano que equivale a decir que los puntos $U_1$, $U_2$ sean impropios (en el sentido de que estén en el infinito).

## 10. Dependencia e independencia lineal.

Definición.—Se dice que un punto A depende linealmente de los puntos $A_1\ A_2 \ldots A_n$ si todo vector $v \in A$ puede expresarse como una combinación lineal de un conjunto de vectores, uno de cada punto

$$v_1 \in A_1,\ v_2 \in A_2, \ldots, v_n \in A_n.$$

Consecuencia: Basta con que un vector concreto $v \in A$ dependa linealmente de un conjunto de vectores, uno de cada punto $A_1\ A_2 \ldots A_n$, para que A dependa de $A_1\ A_2 \ldots A_n$.

En efecto

$$v \in A,\ v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

luego cualquier otro vector de A será de la forma

$$\lambda\, v = \lambda\, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda\, \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

siendo

$$\mu_1 = \lambda\, \lambda_1, \ldots\ldots, \mu_n = \lambda\, \lambda_n$$

luego depende linealmente del conjunto $(v_1 \ldots v_n)$ y por lo tanto A depende linealmente de $A_1 \ldots A_n$ c. q. d.

Definición.—Se dice que los puntos $A_1 \ldots A_n$ son linealmente dependientes cuando uno de ellos depende linealmente de los restantes.

La anterior definición equivale a que un vector de uno de los puntos depende de un conjunto de vectores, uno de cada uno de los restantes puntos; y esto, al estudiar la dependencia en espacios vectoriales, se ve que es equivalente a que existe una relación $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, donde no todos los coeficientes son nulos, o sea $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Resumiendo: $(A_1\ A_2 \ldots A_n)$ linealmente dependientes $\Longleftrightarrow$ $(v_1\ v_1 \ldots \ldots v_n)$ linealmente dep.; $v_1 \in A_1 \ldots . v_n \in A_n \Longleftrightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$, $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

En el caso de que no sean linealmente dependientes, se dicen linealmente independientes $(A_1,\ A_2 \ldots A_n)$ linealmente independientes $\Longleftrightarrow$ $(v_1\ v_2 \ldots v_n)$ lineamente indep.; $v_1 \in A_1 \ldots v_n \in A_n \Longleftrightarrow (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0)$.

Como consecuencia de todas las definiciones anteriores, son inmediatas las conclusiones siguientes:

*a*) A depende linealmente de $(A_1 \ldots A_n) \Leftrightarrow A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$.

*b*) $(A_1 \ldots A_n)$ linealmente dependientes $\Leftrightarrow \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n = 0$ , $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \neq (0, \ldots , 0)$.

*c*) $(A_1 \ldots A_n)$ linealmente indep. $\Leftrightarrow (\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0)$.

11. APLICACIONES DE LOS ANTERIORES CONCEPTOS A CASOS CONCRETOS.

I. *Recta proyectiva.*—Si estudiamos el caso de la recta proyectiva, $n$ puntos $A_1 \ldots . A_n$, son linealmente dependientes, *siempre que* $n \geqslant 3$, pues tres o más vectores $v_1 \ldots v_n$, en el plano vectorial son siempre linealmente dependientes.

Dos puntos de la recta $A_1$, $A_2$ son linealmente independientes, siempre que sean distintos, pues equivale a que dos vectores en el plano son linealmente independientes si no están sobre la misma recta (o rectas paralelas).

Dados tres puntos en la recta $A_1$ $A_2$ A, siempre son linealmente dependientes, o sea que uno de ellos depende de los otros dos.

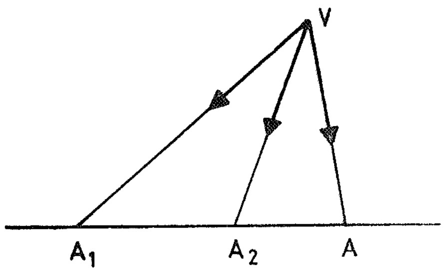


Fig. 16

*A* depende linealmente de $(A_1 \, A_2)$, o sea $A = \lambda A_1 + \mu A_2$; $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ cualquiera que sea A, si $A_1 \neq A_2$.

Si consideramos los puntos de la referencia proyectiva

$$R = \{ U_1 \, U_2 \, ; U \}$$

vimos que

$$U_1 = (0,1) \quad U_2 = (1,0) \quad U_1 + U_2 = U = (1,1),$$

y *A* tiene de coordenadas $(a_1 \, a_2)$ respecto de R resulta $A = a_1 U_1 + a_2 U_2$.

II. *Plano proyectivo.* — En el caso del plano proyectivo, el máximo número de puntos linealmente independientes es 3, es decir, que $A_1 \, A_2 \ldots A_n$ son linealmente dependientes si $n \geqslant 4$.

Tres puntos distintos y no alineados son siempre linealmente independientes como corresponde a tres vectores del mismo origen en el espacio no situados sobre la misma recta ni sobre el mismo plano.

Dados tres puntos del plano ($A_1 A_2 A_3$), linealmente independientes, cualquier otro punto A, depende linealmente de ellos, es decir,

$$A = \lambda A_1 + \mu A_2 + \nu A_3$$

Si se toman los puntos $U_1$, $U_2$, $U_3$ de la referencia $R = \{ U_1 U_2 U_3 ; U \}$, resulta que $\lambda$, $\mu$ $\nu$ son las coordenadas de A. Es decir, que si $A = (a_1 a_2 a_3)$, entonces $A = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3$.

## 12. Variedades lineales proyectivas.

Dados $n$ puntos $A_1 A_2 \ldots A_n$ linealmente independientes, el conjunto de todos los puntos A, tales que $A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$ forman lo que se llaman una *variedad linealmente proyectiva de dimensión* $n - 1$.

Cualquier *punto* A es una variedad lineal proyectiva de dimensión cero $A = \lambda A$.

Las *rectas proyectivas* son variedades lineales de dimensión 1 : $\{ A = a_1 U_1 + a_2 U_2 / a_1, a_2 \in \mathbf{R} \}$.

Los *planos proyectivos* son variedades lineales de dimensión 2:

$$\{ A = a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 / a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R} \}$$

## 13. Variedades en los espacios vectorial, afin y proyectivo. Variedades lineales.

En el plano podemos considerar «curvas» cuya definición está en estrecha relación con la recta o segmento de recta. En la recta los puntos están ordenados, tiene sentido hablar de «antes de», «después de», «entre»; además, la recta es un ente continuo en el sentido físico de que no tiene agujeros (postulado de continuidad de la recta). Estas propiedades se hacen extensiva a entes más generales, que llamamos curvas; en una curva, en el sentido vulgar o intuitivo, los puntos también están ordenados, y carece de agujeros. Un caso particular de curva es un punto.

La curva puede obtenerse deformando la recta en el caso de que la recta esté materializada por un hilo de cobre.

---

En el espacio, además de curvas que están en estrecha vinculación con la recta, existen otros entes matemáticos, que tienen relación con el plano, que son las superficies. Una superficie puede definirse como un plano deformado, en el supuesto de que el plano estuviese materializado por una lámina metálica muy delgada.

---

En el plano se da el nombre de «variedades» a los puntos y a las curvas.

En el espacio se da el nombre de «variedades» a los puntos, curvas y superficies.

Para definir una curva se hace uso del concepto de recta. (Se establece como una aplicación de un segmento de recta en el plano o en el espacio; esta aplicación con ciertas condiciones.)

Para definir una superficie, se hace uso del concepto de plano. (Una superficie es una aplicación de un trozo de plano, por ejemplo, un rectángulo, en el espacio; esta aplicación sujeta a ciertas condiciones.)

Los conceptos de punto, recta y plano son ideas primarias en el sentido de que no se intenta definirlos y han surgido como una abstracción del mundo físico. El concepto de curva y de superficie también tienen un apoyo físico, pero ya podemos intentar una definición formal a partir de los anteriores.

Realmente la recta es un caso particular de curva, y el plano es un caso particular de superficie.

Estas variedades más sencillas se conocen con el nombre de «variedades lineales».

| Variedades lineales | Variedades |
|---|---|
| Punto | Punto |
| Recta | Curva |
| Plano | Superficie |

---

La recta afin es la recta intuitiva de la geometría elemental. Análogamente ocurre con el plano afin y espacio afin. A partir de estos conceptos se han construido los espacios vectoriales geométricos. Sin embargo, al estructurar algebraicamente la geometría, se procede en sentido contrario, es decir, se parte del espacio vectorial (de cualquier dimensión) y a partir de él se formaliza el espacio afin de la misma dimensión. (Recuérdese la definición de plano afin y espacio afin a partir del plano y espacio vectorial, respectivamente.)

Por analogía con las variedades lineales afines de las que hemos hablado, se llaman variedades lineales vectoriales a los subespacios vectoriales:

| | |
|---|---|
| vector cero | (dimensión 0) |
| rectas vectoriales | ( » 1) |
| planos vectoriales | ( » 2) |
| espacio vectorial | ( » 3) |

Al estudiar el espacio proyectivo, resultan las variedades lineales proyectivas de definición análoga:

| | |
|---|---|
| recta proyectiva | (dimensión 1) |
| plano proyectivo | ( » 2) |
| espacio proyectivo | ( » 3) |

Los tres tipos de variedades lineales (vectoriales, afines y proyectivos) tienen de común el ser engendradas linealmente, es decir, como combinación lineal de elementos. Ejemplo,

$$\textit{Plano vectorial} = \{ \bar{x} \,/\, \bar{x} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b} \,;\, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \}$$

donde $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son vectores linealmente independientes

$$\textit{Plano afin} = \{ X \,/\, X = \lambda A + \mu B + \nu C; \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R} \,;\, \lambda + \mu + \nu = 1 \}$$

donde A, B y C son puntos linealmente independientes. Recuérdese que A, B y C se identifican con los vectores libres $\{ \overrightarrow{OA} \}$, $\{ \overrightarrow{OB} \}$, $\{ \overrightarrow{OC} \}$, respectivamente.

$$\textit{Plano proyectivo} = \{ X \,/\, X = \lambda A + \mu B + \nu C \,;\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R} \}$$

donde A, B, C son puntos linealmente independientes. En este caso A, B, C se identifican con rectas vectoriales de $V_3$.

Naturalmente, las definiciones de dependencia lineal en cada uno de los espacios (vectorial, afin, proyectivo) son diferentes, pero la forma de engendrarse las variedades lineales es la misma, y de ahí el nombre.

## 14. Consideraciones.

Para construir la recta proyectiva (espacio proyectivo de dimensión 1), nos hemos servido del plano vectorial $V_2$.

Para construir el plano proyectivo (espacio proyectivo de dimensión 2) hemos utilizado el espacio vectorial de dimensión tres $V_3$.

Para construir el espacio proyectivo de dimensión tres habríamos de utilizar el espacio vectorial de dimensión cuatro $V_4$.

El espacio proyectivo de dimensión tres tiene interpretación física o intuitiva, pues podemos imaginarlo como el espacio euclídeo, al que hemos añadido los puntos impropios de cualquier recta, pero el espacio $V_4$ no es imaginable. Ahora bien, como tenemos estructurado algebraicamente el espacio vectorial de cualquier dimensión $V_{n+1}$, podemos construir, a partir de él, el espacio proyectivo de dimensión $n$, sin recurrir a imágenes geométricas, sino de una manera puramente formal. Vamos a fijarnos en el método seguido.

### a) *Recta proyectiva.*

Hemos partido del plano vectorial $V_2$ y hemos construido la recta proyectiva identificando las rectas vectoriales de $V_2$, es decir, las variedades lineales de dimensión 1, con los puntos de la recta proyectiva.

La variedad lineal de dimensión cero, o sea el vector cero $\bar{0}$ de $V_2$ no tiene correspondiente en la recta proyectiva, podemos decir que la corresponde el vacío $\emptyset$.

Al plano vectorial $V_2$ le corresponde la recta proyectiva completa.

He aquí la correspondencia entre variedades lineales de uno y otro espacios.

VARIEDADES LINEALES

| Vectoriales | | Proyectivas |
|---|---|---|
| Plano vectorial $V_2$ | $\equiv$ | Recta proyectiva $P_1$ |
| Rectas vectoriales $V_1$ | $\equiv$ | Puntos $A_1$ de la recta proyectiva |
| Vector 0 del espacio vectorial | $\equiv$ | Conjunto vacío de la recta proyectiva |

b) *Plano proyectivo.*

A partir de $V_3$, espacio vectorial de dimensión tres, construimos el plano proyectivo identificando variedades lineales de modo análogo.

VARIEDADES LINEALES

| Vectoriales | | Proyectivas |
|---|---|---|
| Espacio vectorial $V_3$ | $\equiv$ | Plano proyectivo $P_2$ |
| Planos vectoriales $V_2$ | $\equiv$ | Rectas proyectivas $P_1$ |
| Rectas vectoriales $V_1$ | $\equiv$ | Puntos del plano proyectivo, $A_1$ |
| Vector 0 de $V_3$ | $\equiv$ | Conjunto vacío $\varnothing$. |

c) *Caso general.*

Teniendo en cuenta los dos casos anteriores, sencillos y de fácil interpretación intuitiva, podemos trasladar estos conceptos al caso general de espacio proyectivo de dimensión $n$. La identificación de variedades se realiza del siguiente modo

VARIEDADES LINEALES

| Vectoriales | | Proyectivas |
|---|---|---|
| Espacio vectorial $V_{n+1}$ | $\equiv$ | Espacio proyectivo $P_n$ |
| Variedad vectorial $V_h$ | $\equiv$ | Variedad proyectiva $P_{h-1}$ |
| $h = n - 1, n - 2, \ldots, 3, 2, 1.$ | | |
| Vector $\bar{0}$ de $V_{n+1}$ | $\equiv$ | Conjunto vacío $\varnothing$ |

Podemos decir que el espacio proyectivo $P_n$, de dimensión $n$, es el conjunto de variedades lineales del espacio vectorial $V_{n+1}$ (sabemos que este conjunto tiene estructura de retículo), excluido el vector 0.

En esta identificación las variedades lineales vectoriales disminuyen su dimensión en una unidad, al considerarlas proyectivas.

La dimensión vectorial en el espacio proyectivo se llamará rango. Ejemplos:

Los puntos son de rango uno, y de dimensión cero.
Las rectas proyectivas son de rango dos y de dimensión uno.
Los planos proyectivos son de rango tres y de dimensión dos.

### 15. Estudio clasivo de la geometría proyectiva.

La manera clásica de estudiar la geometría proyectiva consistía en distinguir tres conjuntos de entes geométricos que se llamaban formas (de primera, segunda y tercera categoría).

Las formas de primera categoría eran:

Series rectilíneas.
Haz de rectas.
Haz de planos.

La serie rectilínea es la recta euclídea incluido el punto impropio.

El haz de rectas es el conjunto de rectas coplanarias que pasan por un punto.

El haz de planos es el conjunto de planos que pasan por una recta.

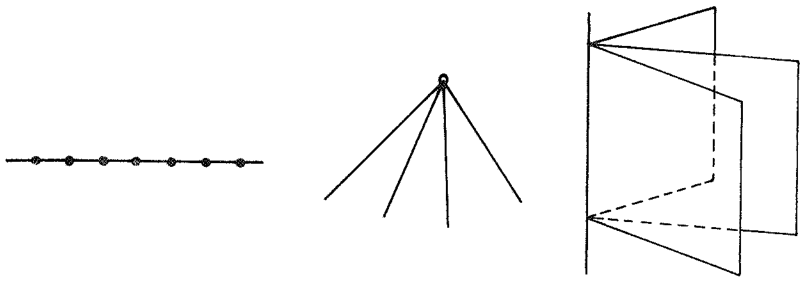

**Fig. 17**

Realmente, las tres formas de primera categoría pueden identificarse a la serie rectilínea, es decir, a la *recta proyectiva* o espacio proyectivo de dimensión 1. Por ejemplo, si cortamos el haz de rectas por una recta que no pertenezca al haz, consideramos la biyección $a \longleftrightarrow A$, donde $a$ es cualquier recta del haz, incluida la paralela $a$ $r$, y A es el punto de corte de $a$ con $r$. (En el caso de recta paralela, el punto de corte es un punto especial que hemos añadido a la recta euclídea y que llamamos punto impropio.)

Análogamente, si cortamos el haz de planos con una recta que se cruce con la base del haz, podemos establecer la biyección $A \longleftrightarrow \alpha$ entre puntos de la recta (incluido el punto impropio) y planos del haz. A cada plano del haz le hacemos corresponder su punto de corte con la

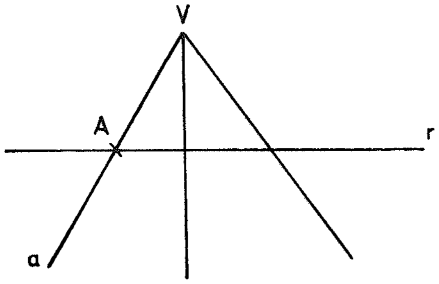


Fig. 18

recta. Al plano del haz, paralelo a la recta, le corresponde el punto impropio.

En resumen, una forma de primera categoría coincide con la recta proyectiva, o mejor «es un espacio proyectivo de dimensión 1».

Las llamadas formas de segunda categoría eran:

El plano punteado.
El plano reglado.
La radiación de rectas.
La radiación de planos.

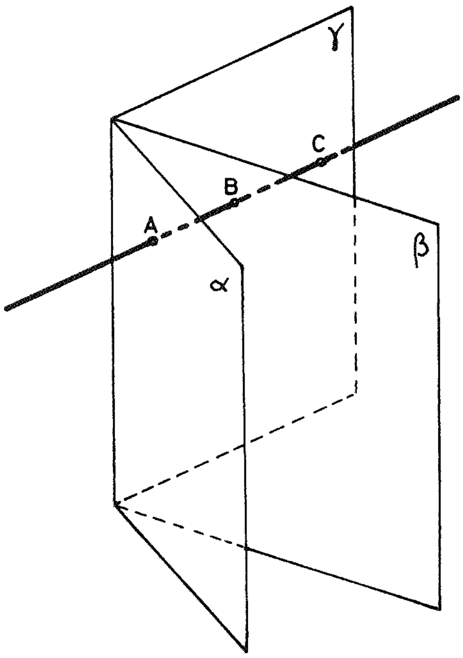


Fig. 19

El plano punteado se definía como el plano euclídeo con todos los puntos impropios que forman la recta impropia del plano.

El plano reglado es el plano euclídeo, considerado como el conjunto de todas sus rectas, incluida la recta impropia.

Radiación de rectas es el conjunto de todas las rectas del espacio que pasan por un punto.

Radiación de planos es el conjunto de todos los planos que pasan por un punto.

La radiación de rectas puede identificarse con un plano proyectivo que no pase por el vértice de la radiación. A cada recta hacemos corresponder su punto de intersección con el plano. A las rectas de la radiación que son paralelas al plano, les corresponden puntos impropios.

La radiación de planos puede identificarse con el plano reglado, haciendo corresponder a cada plano de la radiación la recta intersección con un plano dado. Al plano paralelo le corresponde la recta impropia.

La distinción que se hacía entre plano punteado y reglado es supérflua, pues al estudiar el plano proyectivo se consideran tanto las rectas como los puntos.

Resulta, por lo tanto, que una forma de segunda categoría coincide con el plano proyectivo, o mejor «es un espacio proyectivo de dimensión dos».

La forma de tercera categoría era el espacio euclídeo, al que habíamos añadido el conjunto de los puntos impropios que forman el plano impropio, o sea que es lo que hemos llamado «espacio proyectivo de dimensión tres».

---

La geometría proyectiva clásica aquí terminaba, se reducía a estudiar relaciones entre los elementos citados. No se estudiaban espacios proyectivos de dimensión superior a tres.

El estudio actual es más general y tiene una estética más perfecta; se ha llegado a establecerlo partiendo de lo intuitivo mediante un proceso de abstracción que tenía como fin su formalización.