DIFERENCIAS FINITAS. ECUACIONES

por

MANUEL TORRES DOMÍNGUEZ

Sea K un cuerpo conmutativo y $S = F(N\,;K)$ el conjunto de las sucesiones sobre K.

Teorema I. El conjunto S tiene estructura de K-algebra respecto a las operaciones:

$$\{ a_n \} + \{ b_n \} = \{ a_n + b_n \}$$
$$\{ a_n \} \cdot \{ b_n \} = \{ a_n \cdot b_n \}$$
$$t \cdot \{ a_n \} = \{ t \cdot a_n \} \quad \forall\, t \in K$$

Teorema II. El conjunto $\Omega = L_k(S, S)$ de las aplicaciones lineales de S en S (como espacio vectorial) es una K-álgebra respecto a las operaciones:

$$(\Lambda + \Lambda')\{ a_n \} = \Lambda\{ a_n \} + \Lambda'\{ a_n \}$$
$$(\Lambda \cdot \Lambda')\{ a_n \} = \Lambda\,[\,\Lambda'\{ a_n \}]$$
$$(t \cdot \Lambda)\{ a_n \} = t \cdot \Lambda\{ a_n \}\ \forall\, t \in K$$

ELEMENTOS DESTACADOS DE Ω

1.º Elemento unidad:

$$I : S \longrightarrow S \ (\equiv)_d \quad I\{ a_n \} = \{ a_n \}$$

2.º

$$E : S \longrightarrow S \ (\equiv)_d \quad E\{ a_n \} = \{ a_{n+1} \}$$

3.º Diferencia finita de primer orden:

$$\Delta : S \longrightarrow S \ (\equiv)_d \quad \Delta\{ a_n \} = \{ a_{n+1} - a_n \}$$

4.º Diferencia finita de orden m·

$$\Delta^m \ (\equiv)_d \quad \Delta^m = \underbrace{\Delta \cdot \Delta \cdot \ldots \cdot \Delta}_{m}$$

Es evidente que I, E, Δ, $\Delta^m \in \Omega$, no obstante demostraremos la pertenencia de los dos últimos.

a) $\Delta \in \Omega$

ya que

$$\Delta [\lambda \{a_n\} + \mu \{b_n\}] =$$
$$\Delta [\{\lambda a_n + \mu b_n\}] = \{\lambda a_{n+1} + \mu b_{n+1} - \lambda a_n - \mu b_n\} =$$
$$= \lambda \{a_{n+1} - a_n\} + \mu \{b_{n+1} - b_n\} = \lambda \Delta \{a_n\} + \mu \Delta \{b_n\}$$

b) Del teorema II y el apartado anterior se deduce que

$$\Delta^m \in \Omega \quad \forall\, m \in \mathrm{N}$$

PROPIEDADES DEL OPERADOR Δ

a) $$\boxed{\Delta [\{a_n\} \cdot \{b_n\}[= \{a_n\} \Delta \{b_n\} + \Delta \{a_n\} \cdot \mathrm{E} \{b_n\}}$$

Demostración:

$$\Delta [\{a_n\} \cdot \{b_n\}] = \Delta \{a_n b_n\} = \{a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n\} = \{a_{n+1} b_{n+1} -$$
$$- a_n b_{n+1} + a_n b_{n+1} - a_n b_n\} = \{b_{n+1}\} \{a_{n+1} - a_n\} + \{a_n\} \{b_{n+1} -$$
$$- b_n\} = \mathrm{E} \{b_n\} \Delta \{a_n\} + \{a_n\} \Delta \{b_n\} \quad \#$$

b) Si $b_n \neq o \quad \forall\, n \in \mathrm{N} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \frac{\{b_n\} \Delta \{a_n\} - \{a_n\} \Delta \{b_n\}}{\{b_n\} \cdot \mathrm{E} \{b_n\}}}$$

Demostración:

$$\Delta \left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\} = \left\{ \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \right\} = \left\{ \frac{a_{n+1} b_n - a_n b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right\} =$$
$$= \frac{\{a_{n+1} b_n - a_n b_n + a_n b_n - a_n b_{n+1}}{\{b_n\} \{b_{n+1}\}} =$$
$$= \frac{\{b_n\} \Delta \{a_n\} + \{a_n\} \Delta \{b_n\}}{\}b_n\} \mathrm{E} \{b_n\}.} \quad \#$$

DEFINICIÓN. *In-ésima diferencia finita de orden m*

Es el término n-ésimo de la sucesión $\Delta^m \{a_n\}$.
La representaremos por $\Delta^m a_n$.

Teorema III.

$$\boxed{\Delta^m a_n = \sum_{k=o}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{K} a_{n+k}}$$

Demostración:

$$\Delta^m = (E - I)^m = \sum_{k=o}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{K} E^k \Rightarrow$$

$$\Delta^m a_n = \sum_{k=o}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{K} a_{n+k} \quad \#$$

Teorema IV.

$$\boxed{a_n = \sum_{k=o}^{n-1} \binom{n-1}{K} \Delta^k a_1}$$

FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN DE NEWTON

Demostración:

$$a_n = E^{n-1} a_1 = (I + \Delta)^{n-1} a_1 = \sum_{k=o}^{n-1} \binom{n-1}{K} \Delta^k a_1 \quad \#$$

NOTA.—En lo anterior hemos utilizado el siguiente convenio:

$$\Lambda \{ a_n \} = \{ \Lambda a_n \}$$

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

Definición. Recibe el nombre de ecuación en diferencias finitas con una incógnita y de orden K toda expresión del tipo:

$$F [\{ x_n \} , \Delta \{ x_n \} , \Delta^2 \{ x_n \} \ldots , \Delta^k \{ x_n \} [= 0$$

donde F es una aplicación de S^{k+1} en S.

Definición. $\{ a_n \} \in S$ se dice que es solución de la ecuación anterior

$$\Longleftrightarrow \quad F [\{ a_n \} , \Delta \{ a_n \} \dots \Delta^m \{ a_n \}] = 0$$

Resolver una ecuación es hallar el conjunto S(F) de todas sus soluciones.

Notemos que, teniendo en cuenta el teorema III, la ecuación citada puede ponerse en la forma:

$$\Phi [\{ x_n \} , \{ x_{n+1} \} \dots \{ x_{n+k} \} [= 0$$

Teorema V. Dada la ecuación

$$\{ x_{n+k} \} = \Phi [\{ x_n \} , \dots , \{ x_{n+k-1} \}]$$

y fijados K elementos de K : $b_1, b_2, \dots , b_k$, existe una y una sola solución $\} a_n \}$ que cumpla:

$$a_i = b_i \qquad i = 1, 2, \dots , n.$$

Demostración. Por recurrencia.

DEFINICIÓN. *Ecuación lineal.*

Reciben dicho nombre las del tipo:

$$\} a_n^c \{ + \} a_n^1 \} \} x_n \{ + \} a_n^2 \} \Delta \} x_n \} + \dots + \} a_n^k \{ \Delta^k \} x_n \{ = 0$$

Si $a_n^o = 0 \quad \forall n \in N$, la ecuación se dice homogénea.

Teorema VI. Toda ecuación lineal homogénea

$$\} a_n^o \} \} x_n \{ + \} a_n^1 \{ \Delta \} x_n \{ + \dots\dots + \} a_k^n \{ \Delta^k \} x_n \{ = 0$$

nos permite definir un endomorfismo en el espacio vectorial S:

$$\varphi [\} x_n '] = \} a_n^o \{ \} x_n \} + \dots + \} a_n^k \{ \Delta^k \} x_n \{$$

Demostración. Consecuencia inmediata de los teoremas I y II.

Teorema VII. El conjunto S(F) de las soluciones de la ecuación

$$\} a_n^o \{ \} x_n \{ + \} a_n^1 \{ \Delta \} x_n \{ + \dots + \} a_n^\alpha \} \Delta^\alpha \} x_n \{ = 0$$

donde

$$a_n^\alpha \neq 0 \quad \forall n ,$$

es un subespacio vectorial de S isomorfo a K^α.

Demostración:

1.º S(F) es un subespacio vectorial de S, por ser el núcleo del endomorfismo φ definido en el teorema VI.

2.º El subespacio vectorial S(F) es isomorfo a K^{α}, ya que la aplicación:

$$i : K^{\alpha} \longrightarrow S(F)\ (\equiv)_d\ i\ [\ a_1, a_2, \ldots a_{\alpha}\ ] = \{\ x_n\ \} \Longleftrightarrow$$

$$x_i = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, \alpha.$$

a) Es biunívoca por el teorema V. Notemos que por ser $\overset{\alpha}{a_n} \neq 0 \quad \forall\, n$ la ecuación dada puede ponerse en la forma precisada en la hipótesis del teorema.

b)

$$i\ [\ \lambda\, (a_i)_1^{\alpha} + \mu\, (b_i)_1^{\alpha}\ ] = i\ [\ (\lambda\, a_i + \mu\, b_i)_1^{\alpha}\ ] = \{\ z_i\ \}$$

donde

$$\left.\begin{array}{l} z_i = \lambda\, a_i + \mu\, b_i \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha \\ i\ [\ (a_i)_1^{\alpha}\ ] = \{\ x_i\ \} \Longleftrightarrow x_i = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha \\ i\ [\ (b_i)_1^{\alpha}\ [\ = \{\ y_i\ \} \Longleftrightarrow y_i = b_i \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow z_i = \lambda\, x_i + \mu\, b_i \quad i = 1, 2, \ldots, \alpha \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \{\ z_i\ \} = \lambda\, \{\ x_i\ \} + \mu\ \}\ b_i\ \} \quad \#$$

Corolario. El conjunto S(F) de las soluciones de la ecuación anterior es un espacio vectorial de dimensión α. Según esto, para conocer las soluciones de la citada ecuación nos bastará con hallar α independientes.

Resolución de una ecuación lineal homogénea de orden 1

Sea $\{\ a_n\ \}\ \{\ x_n\ \} + \Delta\ \{\ x_n\ \} = 0$ la ecuación dada. $\{\ x_i\ \}$ es una solución de ella $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{lclcl} a_1\, x_1 + \Delta\, x_1 = 0 & & a_1\, x_1 = x_1 - x_2 & & x_2 = (1 - a_1)\, x_1 \\ a_2\, x_2 + \Delta\, x_2 = 0 & \Longleftrightarrow & a_2\, x_2 = x_2 - x_3 & \Longleftrightarrow & x_3 = (1 - a_2)\, x_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n\, x_n + \Delta\, x_n = 0 & & a_n\, x_n = x_n - x_{n+1} & & x_{n+1} = (1 - a_n)\, x_n \end{array}$$

Multiplicando miembro a miembro y simplificando nos queda:

$$\boxed{x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i)\, x_1}$$

Como era de esperar, para cada valor dado a x_1 tenemos una solución. Las infinitas soluciones constituyen un espacio vectorial de dimensión 1.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL NO HOMOGÉNEA DE ORDEN 1

Sea

$$\{a_n^o\} + \{a'_n\} \{x_n\} + \Delta \{x_n\} = 0$$

la ecuación dada. Buscaremos para ella una solución de la forma:

$$\{x_i\} = \{u_i\} \cdot \{v_i\}$$

donde $\{v_i\}$ sea una solución de la ecuación

$$\{a'_n\} \{x_n\} + \Delta \{x_n\} = 0$$

Para el cálculo de $\{u_i\}$ notemos que deberá cumplirse:

$$\{a_n^o\} + \{a'_n\} \cdot u_n \{\nu_n\} + \Delta [\{u_n\} \{\nu_u\}] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{a_n^o\} + \{a_n^1\} \{u_n\} \{\nu_n\} +$$

$$+ \{u_n\} \Delta \{\nu_n\} + \{\nu_{n+1}\} \Delta \{u_n\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{a_n^o\} + \{u_{n+1}\} \Delta \{\mu_n\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta \{u_n\} = \frac{-\{a_n^o\}}{\nu_1 \prod_1^n (1 - a'_i)} \Rightarrow$$

$$n = 1 \qquad u_2 - u_1 = \frac{-a_1^o}{\nu_1 (1 - a'_1)}$$

$$n = 2 \qquad u_3 - u_2 = \frac{-a_2^o}{\nu_1 \prod_{i=1}^{2} (1 - a'_i)}$$

. . . .

$$u_n - u_{n-1} = \frac{-a_{n-1}^o}{\nu_1 \prod_1^{n-1} (1 - a'_i)}$$

Sumando y simplificando obtenemos:

$$u_n - u_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a - {}_j^o}{\nu_1 \prod_1^{J-1} (1 - a'_i)}$$

Según esto, tenemos que una solución $\{ x_n \}$ de la ecuación dada es de la forma:

$$\boxed{x_n = v_1 \prod_{i=1}^{n-1} (1 - a_i') \left[u_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{-a_j^0}{v_1 \prod_{i=1}^{j} (1 - a_i')} \right]}$$

GENERALIZACIÓN

Sea $(G, +)$ un grupo abeliano y $F = F(G ; K)$ el conjunto de las aplicaciones de G en un cuerpo K.

Proposición. Fijados dos elementos x_0, h de G podemos dotar a F de la siguiente relación de equivalencia:

$$f \approx g \quad (\equiv)d \quad f(x_0 + n\,h) = g\,(x_0 + n\,h) \quad \forall\, n \in N$$

Teorema. La aplicación

$$\varphi : S \longrightarrow \frac{F}{(\approx)}$$

definida así:

$$\varphi\,[\,\}\,x_m\,\}\,] = [\,f\,] \iff x_n = f(x_0 + n\,h) \quad \forall\, n \in N$$

es biunívoca.

Corolario. La aplicación φ nos permite dotar al conjunto

$$\frac{F}{(\approx)}$$

de estructura de K-álgebra y las operaciones respecto a las que lo es son:

$$[\,f\,] + [\,g\,] = [\,f + g\,]$$
$$[\,f\,] \cdot [\,g\,] = [\,f \cdot g\,]$$
$$t \cdot [\,f\,] = [\,t \cdot f\,]$$

Evidentemente la aplicación φ es un isomorfismo entre las K-álgebras

$$S \text{ y } \frac{F}{(\approx)}$$

Definición. El isomorfismo φ nos permite hacer un estudio análogo de todo lo anterior en

$$\frac{F}{(\approx)}$$

definiendo

$$\Delta_h\, f(x) = f(x + h) - f(x)$$