SÔBRE ELIPSES HOMOTÉTICAS

por

JAYME MACHADO CARDOSO

Introdução. O objetivo da presente nota é dar uma construção simples das tangentes comuns a duas elipses de mesma excentricidade e eixos paralelos, resultado êste anunciado em [1].

Definição 1. Chama-se característica de uma afinidade a razão simples entre um par de pontos correspondentes A,A′ e o ponto em que a reta AA′ corta o eixo.

Observação. Tal característica é constante para todos os pares de pontos correspondentes. (Ver, p. ex. [2], p. 302.)

Definição 2 Elipses semelhantemente dispostas são aquelas que têm paralelos os suportes de seus eixos maiores (menores).

Proposição 1. Uma afinidade ortogonal transforma circunferências em elipses de mesma excentricidade e semelhantemente dispostas.

Demonstração. Consideremos uma circunferência Γ, de raio r, com centro no eixo de uma afinidade ortogonal de característica k que, para fixar as idéias, vamos supor menor que 1. A circunferência é transformada, pela afinidade, em uma elipse da qual o eixo da afinidade é o suporte do eixo maior, de comprimento $2r$. O comprimento do eixo menor será $2kr$. Então, a excentricidade da elipse imagem de Γ será

$$\sqrt{1-k^2}\,.$$

Isto posto, seja Σ circunferência distinta de Γ e sejam AB e CD os diâmetros de Σ respectivamente paralelo e perpendicular ao eixo da afinidade. O segmento A′B′, correspondente de AB, é paralelo e de mesmo comprimento que AB; é o eixo maior da elipse imagem de Σ. O eixo menor será, justamente, a imagem C′D′ de CD. Por tanto, as imagens de Γ e Σ são elipses semelhantemente dispostas.

Indicando com P o ponto comum a CD e ao eixo, temos

$$\frac{C'P}{CP} = \frac{D'P}{DP} = k.$$

Mas, $CP = CD + DP$ e $C'P = C'D' + D'P$, donde resulta

$$\frac{C'D'}{CD} = k,$$

isto é, o comprimento do eixo menor é $C'D' = k \cdot CD$ e, portanto, a excentricidade da imagem de Σ é, também,

$$\sqrt{1 - k^2},$$

o que completa a demonstração.

Proposição 2. Sejám: (i) f e f_1 figuras homotéticas de centro 0, (ii) f' a correspondente de f em afinidade ortogonal de eixo r e característica k, (iii) f'_1 a correspondente de f_1 em afinidade ortogonal de eixo r_1, paralelo a r, de mesma excentricidade k, e tal que r_1 é a correspondente de r na homotetia de qual f e f_1 são correspondentes. Então, f' e f'_1 se correspondem nesta mesma homotetia.

Demonstração. Sejam A e B dois pontos de f, A_1 e B_1 seus correspondentes em f_1, na homotetia de centro 0. Sejam A', B' os correspondentes de A,B na afinidade ortogonal de eixo r, e sejam A'_1, B'_1 os correspondentes de A_1, B_1 na afinidade ortogonal de eixo r_1. Como AB é paralelo a A_1B_1, resulta que $A'_1B'_1$ é paralelo a $A'B'$. Resta mostrar que a reta $A'A'_1$ passa por 0. Para tal, sejam P o ponto comum a reta AA' e ao eixo r, e P_1 o ponto comum a reta $A_1A'_1$ e ao eixo r_1. Como AP é paralela a A_1P_1, conclui-se que P_1 é o correspondente de P na homotetia de centro 0. Mas, como $P_1A_1/P'A' = k$, dos triângulos $AA'0$ e $A_1A'_10$ deduz-se que A e A' estão alinhados com 0.

Observação. Vale uma recíproca, muito mais geral, conforme proposição que segue.

Proposição 3. Figuras correspondentes em afinidade ortogonal de característica k se transformam por homotetia em figuras correspondentes em afinidade ortogonal de mesma característica.

Demonstração. Sejam A e B pontos correspondentes em uma afinidade ortogonal de eixo r e característica k. Então, se C é o ponto comum a r e a reta AB, tem-se $AC/BC = k$. Isto posto, consideremos uma homotetia de centro 0, e que ao ponto A faz corresponder o ponto A', necessàriamente na reta OA. Os correspondentes B' e C', de B e C, em tal homotetia, estão na perpendicular a r conduzida de A', e nas retas BO e CO, respectivamente. A correspondente de r é a paralela r', a r, conduzida por B'. Então, C e C' se correspondem em uma afinidade ortogonal de eixo r'. Dos triângulos semelhantes ACO, $A'C'O$ e BCO, $B'C'O$, tira-se $AC/BC = A'C'/B'C' = k$.

Proposição 4. Se existirem tangentes comuns a duas elipses de mesma excentricidade e semelhantemente dispostas, estas tangentes passam pelos centros de semelhança das circunferências maiores das elipses consideradas.

Demonstração. Sejam Γ e Γ' duas elipses de mesma excentricidade e semelhantemente dispostas, e sejam Σ e Σ suas circunferências maiores. As elipses Γ e Γ' podem ser consideradas correspondentes de Σ e Σ', respectivamente, em afinidades ortogonais de mesma característica. Então, pela proposição 2, as elipses se correspondem nas homotetias que transformam Σ em Σ'. Tais homotetias têm para centros os centros de semelhanças de Σ e Σ' (ver, p. ex. [2], p. 309). Então, se existirem tangentes comuns às elipses, elas passam pelos centros de semelhança de suas circunferências maiores.

Conclusão. Do que precede conclui-se que para traçar as tangentes comuns à duas elipses de mesma excentricidade e eixos maiores (menores) paralelos, basta construir os centros de semelhança de suas circunferências maiores. As retas que passam por tais pontos e são tangentes a uma qualquer das elipses são, também, tangentes à outra.

REFERENCIAS

[1] Cardoso, J. M.: «Common tangents of two ellipses». *Notices Amer. Math. Soc.* V. 17 (1970), p. 670.

[2] Castelnuovo, G.: *Lezioni di Geometria Analitica.* Soc. Ed. D. Alighieri, Milano, 1924.

Universidade Federal do Paraná, Curitaba (Brasil).