SOBRE UNA PROPIEDAD DE LA TEORIA DE CONJUNTOS, demostrada por M. H. A. Newman en *Elements of Topology of Plane Sets of Points*, reprint 1964

por

SANTIAGO GARMA PONS

En la teoría elemental de conjuntos, en el caso en que se consideran conjuntos M, cuyos elementos, a su vez, son conjuntos A_x, se enuncian varias propiedades formales de la unión y la intersección, a saber:

E1. Si $a \in B$, siendo B un conjunto de índices,

$$\bigcap_{x \in B} A_x \subseteq A_a \subseteq \bigcup_{x \in B} A_x$$

E2.1. Si, para cada a de B, $A_a \subseteq C$, entonces $\bigcup A_x \subseteq C$.

E2.2. Si, para cada a de B, $A_a \supseteq C$, entonces $\bigcap A_x \supseteq C$.

A continuación se enuncian hasta cinco propiedades para el caso en que $A_x \subseteq B_x$, para cada x. La ultima de estas propiedades se refiere al conjunto S que contiene a todos los A_x, y dice

$$\zeta(\bigcup A_x) = \bigcap(\zeta A_x).$$

En el libro de M. H. A. Newman, *Elements of Topology of Plane Sets of Points*, se encuentra una prueba de esta ultima propiedad, que considero se puede hacer más claramente:

a) Por E.1, $A_a \subseteq \bigcup A_x$, y por la propiedad del complementario de que si $A \subseteq B$, entonces $\zeta B \subseteq \zeta A$, tenemos que

$$\zeta A_a \supseteq \zeta(\bigcup A_x).$$

Finalmente, aplicando a este caso la propiedad E.2.2, obtenemos

$$\bigcap (\zeta A_x) \supseteq \zeta (\bigcup A_x)$$

b) Por E.1 podemos afirmar que

$$\bigcap \zeta A_x \subseteq \zeta A_a$$

y aplicando la propiedad del complementario antes citada tenemos que

$$\zeta\,(\cap\ A_x) \subseteq A_a$$

y por E.2.1

$$\zeta\,(\cap\ \zeta\ A_x) \supseteq \cup\ A_x$$

de donde aplicando de nuevo el complementario tenemos

$$\cap\ (\zeta\ A_x) \subseteq \zeta\,(\cup\ A_x)$$

lo que con el anterior resultado nos produce la igualdad buscada.
La prueba que da Newman de lo anterior es:
Sea

$$\cup\ A_x = X$$

$$\cap\ (S - A_x) = Y.$$

Entonces claramente

$$X \cup Y \subseteq S$$

y

$$X \cup Y = X \cup \cap\,(S - A_x) = \cap\,(X \cup (S - A_x)) \supseteq \cap(A_x \cup (S - A_x)) = S;$$
$$X \cap Y = Y \cup A_x = \cup(Y \cap A_x) \subseteq \cup((S - A_x) \cap A_x) = 0$$

El resultado se obtiene del teorema 6.1, que dice que si un conjunto X cumple que $A \cup X = S$ y $A \cap X = \varnothing$, entonces $X = \zeta\ A$.