# INTRODUCCION A LAS DISTRIBUCIONES

por

FRANCISCO F. MICHAVILA

Sea $\Omega$ un abierto de $R^n$. Llamaremos $C^\infty(\Omega)$ al espacio de las funciones indefinidamente derivables sobre $\Omega$, de valores complejos.

Recordemos que, si $u \in C^\infty(\Omega)$, se llama *soporte de u* al cierre en $\Omega$ del conjunto de las X de $\Omega$, tales que $u(X) \neq 0$;

$$\text{sop. } u = \overline{\{ u \in \Omega \mid u(X) \neq 0 \}}$$

Este es el complementario en $\Omega$ del mayor abierto sobre el cual $u$ se anula.

## 1. Topología sobre $C^\infty(\Omega)$

Sean K un compacto de $\Omega$ y

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n) \in N^n$$

un multi-índice. Anotamos

$$| \alpha | = \alpha_1 + \ldots. + \alpha_n$$

y para

$$u \in C^\infty(\Omega)$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}} u$$

Se definen sobre $C^\infty(\Omega)$ las *semi-normas* $P_{k,\alpha}$:

$$P_{k,\alpha}(u) = \sup_{X \in K} | D^\alpha u(X) |$$

Consideremos las *semi-bolas*

$$\{ u \in C^\infty(\Omega) \mid P_{k\alpha}(u) < \varepsilon \}$$

Esto permite dar a $C^\infty(\Omega)$ una estructura de espacio vectorial topológico, tomando para el sistema fundamental de vecindades de 0, las intersecciones finitas de semibolas. Un sistema fundamental de vecindades de $u \in C^\infty(\Omega)$ se deduce de aquél por traslación.

## 2. Espacio D(Ω)

Por definición,

$$D(\Omega) = \{ y \in C^{\infty}(\Omega) \mid \text{sop. } u \text{ compacto} \}$$

Este espacio no se reduce a { 0 }: si, por ejemplo, Ω contiene la bola de centro 0 y de radio 1 de $R^n$, la función $u$ definida por

$$u(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mid X \mid \geqslant 1 \\ e^{-\frac{1}{1-\mid X \mid^2}} \text{ si } \mid X \mid < 1 \end{cases}$$

pertenece a D(Ω).

## 3. Convergencia en D(Ω)

Se dice que una serie de funciones $\varphi_k \in D(\Omega)$ converge hacia $\varphi \in D(\Omega)$ si se cumplen las condiciones:

1. Los soportes de las $\varphi_k$ están contenidas en un compacto fijo de Ω.
2. Toda derivada de $\varphi_k$ converge uniformemente hacia la derivada correspondiente de $\varphi$.

## 4. Distribuciones

Se llama *espacio de las distribuciones sobre* Ω, y se anota D'(Ω), al dual topológico de D(Ω), es decir, el espacio de las formas lineales T en D(Ω), que son continuas en el sentido siguiente:

Para toda serie $(\varphi_k)$ converge hacia 0 en D(Ω), $T(\varphi_k)$ converge hacia 0 en C.

Se anota $T(\varphi)$ o $< T, \varphi >$ el valor de la distribución $T \in D'(\Omega)$ sobre la función $\varphi \in D(\Omega)$.

Se demuestra que una forma lineal $T : D(\Omega) \rightarrow C$ es una distribución sobre Ω si y sólo si:

«*Para todo compacto* K de Ω, existe un entero $m$ y un número $c > 0$, tales que para $\varphi \in D(\Omega)$ y sop. $\varphi \subset K$, se tiene:

$$\mid T(\varphi) \mid \leqslant c \sum_{\mid \alpha \mid \leqslant m} \sup \mid D^{\alpha} \varphi \mid$$

## 5. Ejemplos

1. Sea $x_0 \in \Omega$. Se define la medida de Dirac en $x_0$ por

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \quad \text{para} \quad \varphi \in D(\Omega)$$

Es una distribución sobre Ω, si $\varphi_k \rightarrow 0$ en D(Ω), entonces, evidentemente, $\varphi_k(x_0) \rightarrow 0$.

2. Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, es decir, $f$ integrable sobre todo compacto de $\Omega$. La forma lineal $T_f$ definida por:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad , \quad < T_f , \varphi > = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

es una distribución sobre $\Omega$. En efecto, la integral tiene sentido y

$$| < T_f , \varphi > | \leqslant \int_{\text{sop } \varphi} | f | \, dx \sup | \varphi |$$

Como la aplicación $f \to T_f$ es inyectiva, se puede identificar $L'_{loc}(\Omega)$ como subespacio de $D'(\Omega)$:

$$L'_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$$

En este sentido, *las distribuciones generalizan las funciones.*

## 6. Derivación de las distribuciones

En particular se tiene $C^\infty(\Omega) \subset D'(\Omega)$. Busquemos cómo definir una derivación de las distribuciones que *prolongue a la de funciones* $C^\infty$. Se debe tener para $f \in C^\infty(\Omega)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(T_f) = \frac{T_{\partial f}}{\partial x_1} ;$$

sea

$$\forall \varphi \in D(\Omega) , < \frac{\partial}{\partial x_1}(T_f) , \varphi > = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx$$

Donde el segundo miembro se escribe también por integración por partes:

$$-\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx$$

Por lo tanto, se tiene

$$\forall \varphi \in D(\Omega) , < \frac{\partial}{\partial x_1}(T_f) , \varphi > = - < T_f , \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} >$$

De donde, la definición de la derivada

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}$$

de una distribución $T \in D'(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) , < \frac{\partial T}{\partial x_1} , \varphi > = - < T , \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} >$$

Se verifica inmediatamente que

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}$$

es también una distribución sobre $\Omega$. Por tanto, *toda distribución* (en particular toda función localmente integrable) *es indefinidamente derivable* (en el sentido de las distribuciones, es decir, en el sentido de la expresión anterior).

Si $\alpha$ es un multi-índice, se tiene:

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \; , \; < D^{\alpha} T \, , \varphi = (-1)^{|\alpha|} < T \, , D^{\alpha} \varphi > \; ;$$

más generalmente: sea

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha} D^{\alpha}$$

*un operador diferencial de coeficientes constantes* ($a_{\alpha} \in C$):

$$< P(D) \, T \, , \varphi > = < T \, , P(-D) \, \varphi >$$

donde

$$T \in D'(\Omega) \; , \; \varphi \in D(\Omega) \quad \text{y} \quad P(-D)$$

designa al operador transpuesto:

$$P(-D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha} D^{\alpha}.$$

## 7. Soporte de una distribución

Sea $w$ un abierto de $\Omega$, se dice que una distribución $T \in D'(\Omega)$ es nula sobre $w$ si:

$$\forall \varphi \in D(w) \quad , \quad T(\varphi) = 0$$

La unión de todos los abiertos $w$, donde T es nula, es también un abierto de $\Omega$ donde T es nula, y es el mayor de todos. El complementario de este conjunto es un cerrado de $\Omega$, llamado *soporte de T*.

Esta definición generaliza a la de soporte de una función:

Si

$$f \in C^{\infty}(\Omega)$$

se tiene

$$\operatorname{sop} T_f = \operatorname{sop} f$$

Sea $\varepsilon'(\Omega)$ el dual topológico de $C^{\infty}(\Omega)$ (a veces se anota también $\varepsilon(\Omega)$, de donde la notación $\varepsilon'(\Omega)$; es, por lo tanto, el espacio de las formas lineales T; $C^{\infty}(\Omega) \to C$, tales que existe un compacto K de $\Omega$ un entero $m$, y un número $c > 0$, tales que para $\varphi \in C^{\infty}(\Omega)$

$$| T(\varphi) | \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{K} | D^{\alpha} \varphi |$$

(notar la diferencia con la definición de $D'(\Omega)$ dada antes).

Se demuestra que $\varepsilon'(\Omega)$ se identifica con el espacio de las distribuciones de soporte compacto en $\Omega$.

### 8. Producto de una distribución por una función $C^\infty$

Si $T \in D'(\Omega)$ y $f \in C^\infty(\Omega)$, se define el producto $f \cdot T$ por:

$$\forall\, \varphi \in D(\Omega) \quad , \quad < f \cdot T \,, \varphi > \; = \; < T \,, f \cdot \varphi >$$

Es evidente que $f \cdot T \in D'(\Omega)$ y que esta multiplicación prolonga a la de funciones $C^\infty$.

En general no se puede definir el producto de una distribución por una función no $C^\infty$ ($f \cdot \varphi$ no estará más que en $D(\Omega)$ ) y aún menos el de dos distribuciones cualesquiera.

### 9. Producto de convolución

Tomamos aquí $\Omega = R^n$. Sabemos que se puede definir el producto de convolución de dos funciones integrables (para la medida de Lebesgue): si

$$u \,, v \in L^1 (R^n) \,,$$

se escribe

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} u(y)\, v(x - y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} u(x - y)\, v(y)\, dy$$

Será

$$u * v \in L^1(R^n) \quad \text{y} \quad \| u * v \|_1 \leq \| u \|_1 \cdot \| v \|_1$$

Si

$$u \in D'(R^n) \quad \text{y} \quad \varphi \in D(R^n)$$

*se llama producto de convolución de* u *por* $\varphi$ *a la función* $u * \varphi$ *definida por*

$$(u * \varphi)(x) = < u_y \,, \varphi(x - y) >$$

(la notación $u_y$ indica que $u$ opera sobre $\varphi(x - y)$ considerada como una función de $y$, para $x$ fijo).

Se demuestra que:

$$u * \varphi \in C^\infty(R^n)$$
$$\text{sop.}\,(u * \varphi) \subset \text{sop.}\, u + \text{sop.}\, \varphi$$

(si A y B son dos partes de $R^n$, se anota $A + B = \{ x + y, x \in A, y \in B\}$).

Más generalmente, sean $u \in D'(R^n)$ y $v \in \varepsilon'(R^n)$. Definimos, en primer lugar la distribución $\check{v}$, «simétrica de $v$»:

$$\forall\, \varphi \in D(R^n) \qquad < \check{v} \,, \varphi > \; = \; < \check{v} \,, \varphi >$$

con

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$$

Entonces

$$\check{v} \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^n).$$

La igualdad

$$\forall \varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{R}^n) \qquad < u * v , \varphi > \; = \; < u , \check{v} * \varphi >$$

define una distribución $u * v \in \mathrm{D}'(\mathrm{R}^n)$ llamada *producto de convolución* de $u$ por $v$ (es evidente que $\check{v} * \varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{R}^n)$, ya que $\check{v}$ es de soporte compacto). Esta definición prolonga la definición arriba dada de $u * \varphi$, y se tiene

$$\text{sop.}\,(u * v) \subset \text{sop.}\, u + \text{sop.}\, v$$

Sea $\delta$ la medida de Dirac en el origen de $\mathrm{R}^n$; es una distribución de soporte compacto. Se tiene:

$$\forall u \in \mathrm{D}'(\mathrm{R}^n) \quad , \quad u * \delta = u$$

Si $\mathrm{P(D)}$ es un operador diferencial de coeficientes constantes,

$$u \in \mathrm{D}'(\mathrm{R}^n) \quad \text{y} \quad v \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$$

se tiene:

$$\mathrm{P(D)}\, u = u * \mathrm{P(D)}\, \delta$$

$$\mathrm{P(D)}\,(u * v) = (\mathrm{P(D)}\, u) * v = u * (\mathrm{P(D)}\, v)$$

*Para derivar de un producto de convolución se deriva uno de los factores.*

## 10. Regularización

Sea $\varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{R}^n)$, tal que:

$$\begin{cases} \varphi \geqslant 0 \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \varphi \, dx = 1 \end{cases}$$

Escribimos

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Se llama a $(\varphi_\varepsilon)$ serie regularizante (indicada por $\varepsilon > 0$), en razón de la propiedad siguiente:

«Si $\mathrm{T} \in \mathrm{D}'(\mathrm{R}^n)$, se tiene $\mathrm{T} * \varphi_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{R}_\varepsilon)$ y $\mathrm{T} * \varphi_\varepsilon$ converge hacia T en $\mathrm{D}'(\mathrm{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0$ en el sentido siguiente

$$\forall f \in \mathrm{D}(\mathrm{R}^n) \quad , \quad < \mathrm{T} * \varphi_\varepsilon , f > \xrightarrow[\substack{\text{cuando} \\ \varepsilon \to 0}]{} < \mathrm{T} , f >$$

Ademas, si $u \in L^2(R^n)$. Se tiene una convergencia más fuerte:

$$u * \varphi_\varepsilon \to u \qquad \text{en } L^2(R^n)$$
$$\text{cuando } \varepsilon \to 0$$

Las $\varphi_\varepsilon$ permiten por tanto realizar una aproximación de una distribución cualquiera T por funciones regulares $T * \varphi_\varepsilon$.

## 11. Espacios S , S′

Definición del espacio $S = S(R^n)$: es el espacio de las funciones $C^\infty$ sobre $R^n$ de decrecimiento rapido, así como todas sus derivadas:

$$S = \{ u \in C^\infty(R^n) \mid \forall\, k \in N, \forall\, \alpha \in N^n, \sup_{x \in R^n} (1 + | x |)^k \cdot | D^\alpha u(x) | < + \infty \}$$

Se define su topologia por medio de las seminormas naturales:

$$P_{k,\alpha}(u) = \sup_{x \in \mathbf{R}} (1 + | x |)^k | D^\alpha u(x) |$$

Ejemplos: la función $x \to e^{-|x|^2}$ pertenece a S; $D(R^n) \subset S$.

Si dual S′ se llama espacio de las distribuciones determinadas; se tiene $S' \subset D'(R^n)$. ($S'$ se identifica a un subespacio de $D'(R^n)$.) S′ contiene, por ejemplo, las distribuciones definidas por los polinomios en $x$. Se tiene también:

$$L^p(R^n) \subset S' \text{ para todo } p$$

## 12. Transformacion de Fourier en S y L²

Si $u \in S$, se define su *transformada de Fourier*, anotada $\hat{u}$ o $Fu$, por

$$F u(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2i\pi<x,\xi>} u(x)\, dx$$

con

$$< x , \xi > = \sum_{j=1}^{n} x_i \xi_i \quad \xi \in R^n$$

Se define tambien:

$$\overline{F} u(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2i\pi<x,\xi>} u(x)\, dx$$

*La transformacion de Fourier intercambia convolución y multiplicación por un polinomio*: Si $u$, $v \in S$ y Si P(D) es un operador de coeficientes constantes, se tiene

$$u * v \in S \; ; \; u\, v \in S \; ; \; P(D)\, u \in S \; ; \; \widehat{u}\,,\, \widehat{v}\,,\, S \text{ y}$$

$$\widehat{u * v} = \widehat{u} \cdot \widehat{v}$$

$$\widehat{u \cdot v} = \widehat{u} * \widehat{v}$$

$$\widehat{P(D)\, u}(\xi) = P\,(2i\,\pi\,\xi) \cdot \widehat{u}\,(\xi)$$

donde

$$P\,(2i\,\pi\,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha\,(2i\,\pi\,\xi)^\alpha$$

y

$$(2i\,\pi\,\xi)^\alpha = (2i\,\pi\,\xi_1)^{\alpha_1} \ldots\ldots (2i\,\pi\,\xi_n)^{\alpha_n},$$

y, finalmente, sustitutimos en P(D) cada

$$\frac{\partial}{\partial\, x_j}$$

por $2i\,\pi\,\xi_j$.

*La transformación de Fourier es un isomorfismo del espacio vectorial topológico de* S *sobre el mismo.* (Para la topología definida por las seminormas $P_{k,\alpha}$) Y las aplicaciones F y $\bar{F}$ son inversas una de la otra.

$$u\,(x) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2i\pi<x,\xi>}\, \widehat{u}\,(\xi)\; d\,\xi \qquad \text{para } u \in S$$

(fórmula de inversión de Fourier).

En particular,

$$u\,(0) = \int \widehat{u}\,(\xi)\; d\,\xi\,.$$

Aplicando esta formula a

$$u = v * \overset{\vee}{\overline{w}}\,,$$

se obtiene la fórmula de Plancherel-Parseval:

$$\int_{\mathbf{R}^n} u \cdot \overline{v}\; dx = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{u} \cdot \overline{\widehat{v}}\; d\,\xi \text{ para } u\,,\, v \in S$$

Esta relación, que expresa que la transformación de Fourier conserva el producto escalar de $L^2(R^n)$, permite prolongarla al espacio $L^2(R^n)$: La transformación de Fourier se prolonga en un isomorfismo de espacio hilberciense de $L^2(R^n)$ sobre el mismo. En particular

$$\int u\,\overline{v}\,dx = \int \overline{\hat{u}}\,\overline{\hat{v}}\,d\xi \quad \text{para} \quad u\,,\,v \in L^2(R^n)$$

$$\| u \|_2 = \| \hat{u} \|_2$$

### 13. Transformacion de Fourier en S′

Definición: si $u \in S'$, se define $\hat{u}$ por

$$\forall \varphi \in S\,,\ < \hat{u}\,,\varphi > \ = \ < u\,,\hat{\varphi} >$$

Donde $\hat{u}$ es una distribución determinada, ya que F es un isomorfismo de S.

La transformación de Fourier sobre S′ prolonga las de S y sobre $L^2(R^n)$.

La transformación de Fourier es una biyección de S′ sobre S′.

Si $u \in S'$, se tiene

$$\widehat{P(D)}\,u = P\,(2i\,\pi\,\xi)\,\hat{u}$$

(producto de una distribución por una función $C^\infty$ en el segundo miembro).

Si $u$ es de soporte compacto, $u \in \varepsilon'(R^n)$, su transformada de Fourier $\hat{u}$ es una función $C^\infty$ sobre $R^n$, dada por

$$\hat{u}\,(\xi) = \ < u_x\,,\,e^{-2i\pi<x,\xi>} >.$$

Si

$$u \in S' \quad \text{y} \quad v \in \varepsilon'(R^n)$$

se tiene

$$u * v \in S'$$

y

$$\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$$

(en el segundo miembro figura el producto de la distribución $\hat{u}$ por la función $C^\infty$ $\hat{v}$).

*Ejemplo*: De acuerdo con lo anterior, $\hat{\delta}\,(\xi) = 1$. Se comprende así por qué $\delta$ es el elemento neutro del producto de convolución.