EXTREMOS DE CONJUNTOS ACOTADOS DE NUMEROS REALES. COMPLETITUD DEL CUERPO DE LOS NUMEROS REALES

por

V. Zorío B.

Teorema 1. Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.

Aunque en el enunciado hemos dicho «cuerpo», deberíamos haber indicado «cuerpo ordenado», ya que la noción de valor absoluto está ligada al orden que existe en **R**. y respecto de esta noción se definen las sucesiones de Cauchy.

Hemos definido el número real como una clase de sucesiones de Cauchy de números racionales. A continuación se vio que existe una biyección entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la recta geométrica (o sea intuitiva). Para la demostración sólo necesitábamos dos postulados que traducen ideas basadas en la intuición de la recta.

El primero (postulado de Arquímedes) nos viene a decir a «grosso modo» que cualquier segmento de recta, por grande que sea, puede medirse por defecto y por exceso con cualquier unidad por pequeña que sea, con error menor que la unidad tomada.

El segundo (postulado de Dedekind) nos indica que la recta es un ente continuo, es decir, que no tiene poros o agujeros. Esta continuidad no se produce en el mundo físico, pues ni los fluidos ni los sólidos son continuos.

Como hemos indicado, el conjunto de números reales tiene estructura del cuerpo ordenado, lo cual nos permite definir la aplicación valor absoluto, del mismo modo que se hace en los números racionales.

$$R \xrightarrow{|\ |} R_+$$

$$x \longrightarrow |x| = \max(x, x)$$

R^+ = números reales positivos incluído el cero

En este momento definimos:

$$(a_n) \text{ sucesión de Cauchy de números reales } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, n_1 / \mid a_p - a_q \mid < \varepsilon \text{ para } p,\, q > n_1$$

donde ε es un número real arbitrario.

Se demostraría a continuación que toda sucesión de Cauchy de números reales tiene sus términos acotados. (No hacemos la demostración, pues es exactamente igual que para el caso de los números racionales).

$$(a_n) \text{ suc. de Cauchy de núms. reales } \Rightarrow \exists \ \mathrm{K} \in \mathbf{R}$$

tal que

$$-\mathrm{K} < a_n < \mathrm{K}$$

para

$$\forall\, n \in \mathrm{N}$$

Demostración del teorema

Como consecuencia del teorema de Bolzano-Weierstrass, el conjunto formado por los infinitos términos de la sucesión, tiene un punto de acumulación por lo menos. Sea este punto a.

Vamos a demostrar que a es el único punto de acumulación. Si existiese otro punto de acumulación a', podríamos determinar dos entornos de centros a y a', respectivamente, y disjuntos.

En cada uno de estos entornos habrá infinitos términos de la sucesión, tales que

$$a_{n_1} \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$$

$$a_{n_2} \in (a' - \varepsilon,\ a' + \varepsilon)$$

con subíndices n_1 y n_2 mayores que cualquier número prefijado. Por lo tanto,

$$a_{n_2} - a_{n_1} > a' - a - 2\,\varepsilon$$

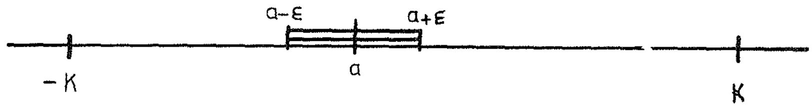
contra la hipótesis de que (a_n) es sucesión de Cauchy.

Con esto hemos demostrado que no puede existir más punto de acumulación que el a.

Veamos que

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Basta con demostrar que, fuera de cualquier entorno $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, hay solamente un numero finito de términos.



Es inmediato que si hubiese infinitos términos en

$$(a + \varepsilon, \mathrm{K}) \text{ o en } (-\mathrm{K}, a + \varepsilon)$$

tendríamos más puntos de acumulación que va contra lo demostrado.

Entonces toda sucesión de Cauchy de números reales tiene límite y por lo tanto **R** *es completo.*

Obsérvese que para demostrar la completitud de **R** sólo hemos hecho uso del teorema de Bolzano-Weierstrass, para cuya demostración sólo se requiere el postulado de Dedekind.

Teorema 2. Todo conjunto de números reales acotado superiormente tiene extremo superior.

Todo conjunto de números reales acotado inferiormente tiene extremo inferior.

Vamos a demostrar solamente el primer enunciado, puesto que la demostración del segundo es semejante.

Sea el conjunto de números reales A, acotado superiormente por K, es decir, tal que $x < \mathrm{K}$ para $\forall\, x \in \mathrm{A}$.

Vamos a realizar una partición del conjunto **R** de los números reales en dos clases, que vamos a llamar $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$.

$\mathbf{R}_1$ = { conjunto de los números reales, que son superados por algún número real de A }

$\mathbf{R}_2$ = { conjunto de los números reales que no son superados por ningún número real de A }

Está claro que

$$\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = \emptyset$$

luego forman $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ una partición de **R**.

Las clases $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ son distintas del vacío, pues $\mathrm{K} \in \mathbf{R}_2$, y si $a, b \in \mathrm{A}$, $a \neq b$ será $a < b$ o bien $b < a$ y de los dos $\{a, b\}$ el menor pertenece a $\mathbf{R}_1$ por ser superado por el otro que pertenece a A. También se puede simplemente decir que cualquier número menor que uno de A pertenece a $\mathbf{R}_1$.

Consideremos entonces elementos cualesquiera $\alpha_1 \in \mathbf{R}_1$ y $\beta_1 \in \mathbf{R}_2$. Formemos el número real

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$$

este número real pertenece a $\mathbf{R}_1$ o bien a $\mathbf{R}_2$. Si pertenece a $\mathbf{R}_1$ le llamaremos α_2, si pertenece a $\mathbf{R}_2$ le llamaremos β_2, o sea:

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \in \mathbf{R}_1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \quad \beta_2 = \beta_1$$

$$\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \in \mathbf{R}_2 \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$$

Repetimos el proceso indefinidamente y resultará

$$\{ \alpha_1, \beta_1 \} \supset \{ \alpha_2, \beta_2 \} \supset \ldots\ldots \supset \{ \alpha_n \ \beta_n \} \supset \ldots\ldots$$

tal que

$$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2} ;$$

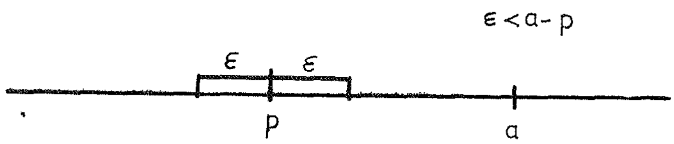
$$\beta_3 - \alpha_3 = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^2} ; \ldots ; \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{n-1}} ; \ldots$$

o sea

$$\lim_{n \to \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$$

luego forman una sucesión de segmentos encajados. Por el postulado de Dedekind su intersección determina un punto único p. Este punto p es tal, que en cualquier entorno suyo hay puntos de la sucesión (α_n) y de la sucesión (β_n).

1. Ningún $a \in A$ puede ser mayor que p, pues si existiera un $a \in A$ tal que $a > p$, considerando el entorno de centro p y de radio ε (menor que $a - p$), llegaríamos al absurdo de que existen elementos de (β_n) dentro del entorno y serán por tanto superados por a, contra la hipótesis de que ningún β_n es superado por ningún elemento de A. Recuérdese que $(\beta_n) \subset \mathbf{R}_2$.

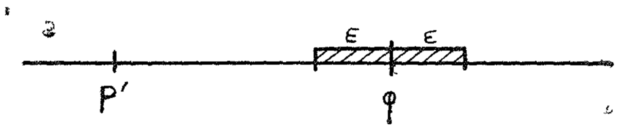


2. En todo entorno de p existen puntos de A, pues en todo entorno de p existen puntos de (α_n) y los α_n son superados por algún elemento de A, ya que $(\alpha_n) \subset \mathbf{R}_1$.

3. El punto $p \in \mathbf{R}_2$. Puesto que $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman una partición de $\mathbf{R}$ se verifica $p \in \mathbf{R}_1$ o bien $p \in \mathbf{R}_2$. Pero según hemos visto $p \notin \mathbf{R}_1$, pues no puede ser superado por ningún punto de A (según 1), luego $p \in \mathbf{R}_2$.

4. p es el menor de los puntos de $\mathbf{R}_2$, pues si existiera $p' \in \mathbf{R}_2$, tal que $p' < p$ podríamos tomar un entorno de centro p y radio $\varepsilon < p - p'$, y llegaríamos al absurdo de que en este entorno existen puntos de A (por 2) y por tanto mayores que $p' \in \mathbf{R}_2$.

Luego p es el *extremo superior* c.q.d.



El punto $p = \text{ext}(A)$ es punto de acumulación de A si $p \notin A$.

Si $p \in A$ puede ser o no ser punto de acumulación.

Otra forma de estudiar la completitud de $\mathbf{R}$.

Vamos a escribir proposiciones relativas a conjuntos de números reales bastante elementales y su aplicación al caso de sucesiones.

1. Todo conjunto de infinitos números reales acotado A tiene un conjunto derivado A′ no vacío

$$A = \{ \text{ conjunto de infinitos números reales, acotado } \}$$

$$A' = \{ \text{ puntos de acumulación de A } \} \neq \emptyset$$

Es consecuencia del teorema de Bolzano.

2. El conjunto derivado A′ es cerrado, pues $(A')' \subset A'$ como es fácil demostrar.

3. A acotado $\Rightarrow$ A′ acotado. La implicación en sentido contrario no se verifica.

4. A′ acotado $\Rightarrow \exists \sup(A')$ y $\exists \inf(A')$. Es consecuencia del teorema 2.

$$\sup(A') = \overline{\text{ext}}(A')$$
$$\inf(A') = \underline{\text{ext}}(A')$$

5. Sup(A) o es punto aislado de A o es punto de acumulación de A en este último caso puede no pertenecer a A).

6. inf(A) resultado análogo al anterior.

7. Si A es cerrado, sus puntos de acumulación le pertenecen. Es decir,

$$A = \bar{A} \Leftrightarrow A' \subset A$$

Luego si A es cerrado y existen sup(A) e inf(A), resultará que

$$\sup(A) \in A \wedge \inf(A) \in A$$

8. A′ cerrado y acotado $\Rightarrow$ existen elementos supremo e ínfimo y pertenecen a A′.

Son el máximo y mínimo de A′.

Aplicando las proposiciones anteriores al caso de sucesiones resultará:

— Toda sucesión de números reales acotada tiene puntos de acumulación.
— El máximo de sus puntos de acumulación (que según 8 existe) se define como el *límite superior.*
— El mínimo de sus puntos de acumulación se define como el *límite inferior.*
— Toda sucesión de Cauchy es acotada; luego toda sucesión de Cauchy tiene límite superior y límite inferior. En este caso, ambos límites coinciden, pues como vimos en la demostración del teorema 1, una sucesión de Cauchy no puede tener más de un punto de acumulación.
— Este punto de acumulación único es el *límite*, luego hemos demostrado que **R** es completo.