INTRODUCCION DEL CALCULO INTEGRAL

(Continuación)

por

MANUEL RUIZ DOMINGUEZ

EJEMPLO 15

Imaginemos un móvil que marcha con un movimiento uniformemente acelerado, por lo que el espacio que recorre (medido en Km.), en función del tiempo (medido en horas), nos lo dá la ecuación $e = t^2$, durante las tres primeras horas; de 3 h. a 4 h. está parado, y en las 3 horas siguientes marcha con velocidad constante, recorriendo 1,5 Km. en tres horas. Después de esto queda definitivamente inmóvil.

Vamos a calcular la velocidad en cada momento:

Desde 3 h. a 7 h. no hay problema, estamos como en el ejemplo anterior:

$$\text{De 3 h. a 4 h.} : v = 0$$

$$\text{De 4 h. a 7 h.} : v = \frac{1}{2} \text{ Km/h}$$

El problema está en calcular la velocidad en cada momento en el intervalo 0 h., 3 h., puesto que aquí varía constantemente.

Lo que haremos será elegir un intervalo de tiempo muy pequeño, en el que podamos imaginar que la velocidad, en ese intervalo, es prácticamente constante. Así, pues, si queremos conocer la velocidad en el momento de $t = 2$ h., elegimos, por ejemplo, el intervalo

$$2 \text{ h.}, 2 \text{ h. y } 1 \text{ seg.}$$

es decir:

$$2 \text{ h.}, 2 + \frac{1}{3.600} \text{ h.}$$

Según la ecuación que nos dá el espacio: $e = t^2$, el espacio recorrido en este intervalo de tiempo es:

$$e_{2h+1sg} - e_{2h} = \left(2 + \frac{1}{3.600}\right)^2 - 2^2 = \frac{4}{3.600} + \frac{1}{3.600^2} \text{ Km.}$$

Como en 1 seg. la velocidad prácticamente no habrá cambiado, para calcularla dividimos el espacio $e_{2h+1eg} - e_{2h}$ por el tiempo empleado que es 1 seg., es decir:

$$\frac{1}{3.600} \, h.$$

Luego la velocidad en $t = 2$ h. es:

$$v_{2h} = \frac{\dfrac{4}{3.600} + \dfrac{1}{3.600^2}}{\dfrac{1}{3.600}} = 4 + \frac{1}{3.600} \text{ Km/h.}$$

y al ser

$$\frac{1}{3.600} \text{ Km/h.}$$

muy pequeña frente a la velocidad de 4 Km/h. podemos despreciarla y decir que

$$\boxed{v_{2h} = 4 \text{ Km/h}}$$

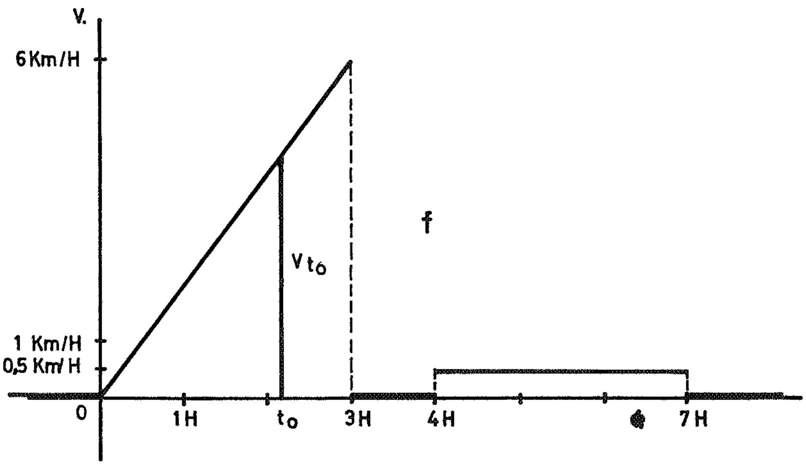
Vamos a hacer lo mismo, pero para un momento cualquiera t_0, $0 \leqslant t < 3$. Igual que antes, para calcular v_{t_0} elegimos, por ejemplo, el intervalo de tiempo: t_0, $t_0 + \epsilon$, donde la letra griega ϵ representa un tiempo muy pequeño, puede ser 1 seg. o una décima de segundo, o una milésima de segundo, etc., o, mejor, un número tan pequeño como nos dé la gana (naturalmente es un número positivo).

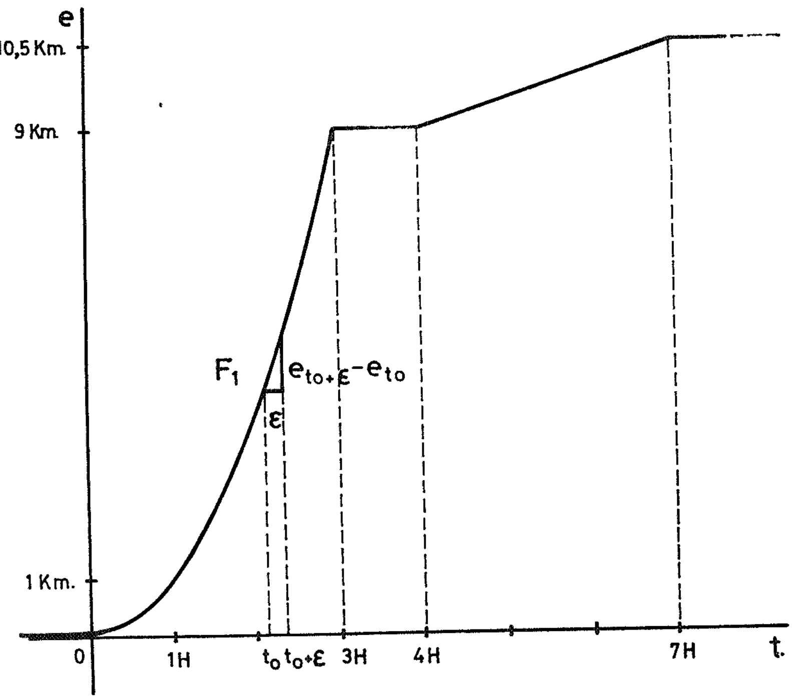
El espacio recorrido entre t_0 y $t_0 + \varepsilon$ es:

$$e_{t_0+\varepsilon} - e_{t_0} = (t_0 + \varepsilon)^2 - t_0^2 = (2\, t_0 \cdot \varepsilon + \varepsilon^2) \text{ Km.}$$

Luego, igual que antes, la velocidad en t_0 será:

$$v_{t_0} = \frac{e_{t_0+\varepsilon} - e_{t_0}}{\varepsilon} = (2\, t_0 + \varepsilon) \text{ Km/h.}$$


V.
6 Km/H
1 Km/H
0,5 Km/H
0
1 H
t_o
3 H
4 H
7 H
f
v_{t_o}


e
10,5 Km.
9 Km.
1 Km.
0
1 H
t_o
$t_o+\varepsilon$
3 H
4 H
7 H
t.
F_1
$e_{t_o+\varepsilon}-e_{t_o}$
ε

Ahora bien, si ε lo hemos elegido todo lo pequeño que queramos pensar, podemos despreciarlo frente al número $2\,t_0$ (ya se comprende que t_0 es del orden de 1, 2, etc., horas), con lo que podemos decir tranquilamente que

$$\boxed{v_{t_0} = 2\,t_0 \text{ Km/h.}}$$

Como t_0 es un punto cualquiera del intervalo 0 h., 3 h., acabamos de obtener que la velocidad, en cualquier momento, expresado en horas, y comprendido entre 0 h. y 3 h., es igual al doble del número que expresa el tiempo en ese momento, expresado en Km/h. Esto se dice de otra manera en Matemáticas:

De 0 h. a 3 h., $v = 2\,t$, t en horas y v en Km/h, que, gráficamente, está representada en la gráfica de f.

También decimos aquí que f es la *función derivada* de la función F_1.

Vamos ahora a obtener una primitiva de la función f; para ello, como en el ejemplo anterior, necesitamos conocer el lugar de donde empieza a andar el móvil. Supongamos, pues, que se encuentra a 1 Km del origen de antes, es decir, a las 0 h. está a 1 Km. del origen, por lo que la gráfica de los espacios pasa por el punto (0, 1).

Cuando la velocidad varía uniformemente, como en el intervalo 0 h., 3 h., una manera de calcular el espacio que se ha recorrido desde que arrancó ($t = 0$ h.) hasta un instante cualquiera, t_0, es calcular la velocidad media en ese trayecto, 0 h., t_0 h., y multiplicarla por el tiempo transcurrido: t_0 h.

Recordemos que la ecuación que nos daba la velocidad es $v = 2\,t$ para $0 \leqslant t < 3$ h.; entonces, a las t_0 horas, el móvil tiene la velocidad:

$$v_{t_0} = 2\,t_0 \text{ Km/h.}$$

Como en $t = 0 : v_{0h} = 0$, entonces, la velocidad media de 0h. a $t_0\,h$ es

$$v_m = \frac{1}{2}(v_{0h} + v_{t_0}) = t_0 \text{ Km/h.}$$

luego, del origen de espacios estará a:

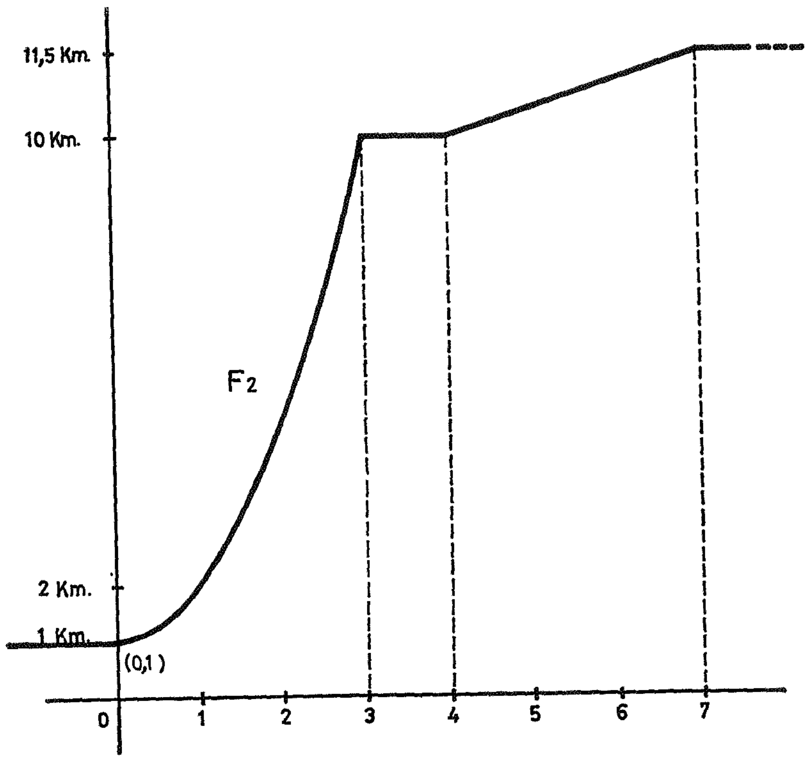
$$e_{t_0} = 1 + e'_{t_0} \text{ Km.}$$

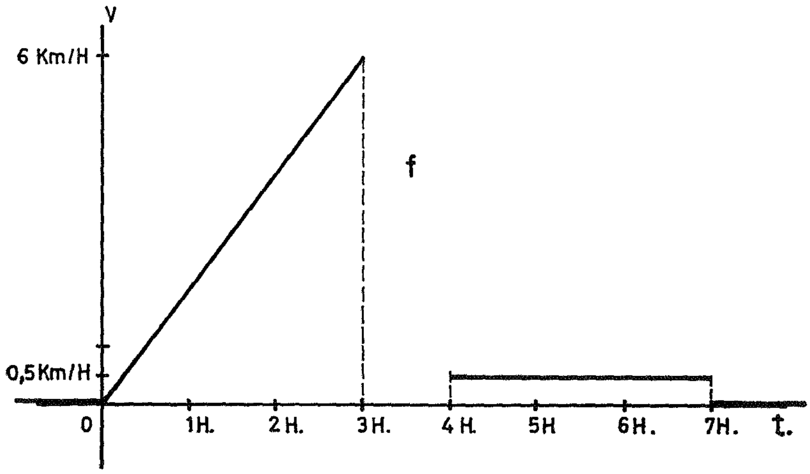
es decir:

$$e_{t_0} = 1 + t_0^2 \text{ Km.}$$

Como t_0 es cualquier tiempo comprendido entre 0 h. y 3 h., podemos dar la ecuación del espacio en el intervalo 0 h., 3 h., que es:

$$\underline{\text{Si } 0 \text{ h.} \leqslant t < 3 \text{ h.} : e = 1 + t^2}$$





luego el espacio recorrido en ese intervalo de tiempo es:

$$e'_{t_o} = v_m \cdot t_o = t_o \cdot t_o = t_o^2 \text{ Km.}$$

Fuera del intervalo 0 h , 3 h., no hay problema; dejaremos que el alumno justifique la gráfica de F_2, fuera del intervalo 0 h., 3 h.

Hemos obtenido así la gráfica F_2, que si la comparamos con la de F_1, ocurre lo mismo que en el ejemplo anterior: Llamando C_1 a la función que $\forall\, t$, $C_1(t) = 1$ Km., ocurre que: $F_2 = F_1 + C_1$.

En general, si C es una función constante cualquiera, la función $F = F_1 + C$, al igual que F_1 y F_2, tiene la propiedad que su función derivada es f, para demostrarlo, no habría más que calcular la función derivada de la función F, siguiendo el mismo procedimiento que cuando calculamos la función derivada de F_1 y nos daríamos cuenta que coincide con f (hágalo el alumno como ejercicio).

A la función F se la llama FUNCION INTEGRAL de la función f; y a cada función integral, particular, como F_1, F_2, etc., se la llama FUNCION PRIMITIVA de la función f.

Ejercicio 9

Con el mismo proceso que se empleó en el ejemplo 14, comprobar que en este ejemplo también se llega a la *regla de Barrow*:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

y demostrar que el número

$$\int_a^b f\,,$$

no depende de la función primitiva que elijamos.

Ejercicio 10

Calcular la función derivada de la función f del ejemplo anterior, es decir, se pide la función que nos dá la *aceleración* del móvil del ejemplo anterior.

Ya vemos que con el ejemplo 15 se ha resuelto el problema de calcular el área que encierra una función que ya no es escalonada (función f); naturalmente, sigue siendo fácil calcular este área con procedimientos elementales: cálculo de áreas de triángulos rectángulos, pero sólo se necesita un poco de imaginación para darse cuenta que el próximo paso será calcular el área que encierra una función cualquiera, cuya gráfica sea una curva, lo cual, si se quiere exacto, hay que hacerlo por este procedimiento. Esto da paso a una extensa teoría denominada CALCULO INTEGRAL.

En el ejemplo que sigue trataremos de hacer lo mismo que en los dos anteriores, con una función mas complicada que las que hemos usado en estos dos ejemplos:

EJEMPLO 16

Consideremos una función f, cuya ecuación es $y = x^3$, donde x es la *variable independiente*, es decir, es la que hace el «papel» de *tiempo* en los ejemplos anteriores; e y es la *variable dependiente* (es el *espacio* o la *velocidad* en los ejemplos anteriores). Vamos a calcular la función derivada de la función f:

Siguiendo las indicaciones del ejemplo anterior para la función F_1, deducimos que hemos de elegir un punto genérico del eje x, sea, por ejemplo, el de abscisa x_0. Elegimos también un número ε muy pequeño (cada uno se lo puede imaginar tan pequeño como quiera, por ejemplo, si la unidad de medida para el eje x es de 1 cm., podemos tomar el número ε igual a 10^{-7} cm. ó 10^{-35} cm., pongamos por caso).

Calculamos las ordenadas de f correspondientes a las abscisas

$$x_o \text{ y } x_o + \varepsilon$$

que son

$$y_{xo} = x_o^3 \quad , , \quad y_{xo+\varepsilon} = (x_o + \varepsilon)^3 = x_o^3 + 3\, x_o^2 \cdot \varepsilon + 3\, x_o \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon^3$$

por último, designando por y'_{xo} la ordenada de la función derivada correspondiente a la abscisa x_o, esta ordenada vale:

$$y'_{xo} = \frac{y_{xo+\varepsilon} - y_{xo}}{\varepsilon}$$

cuando ε es muy pequeño (es decir, cuando ε *tiende a cero*).

Luego

$$y'_{xo} = 3\, x_o^2 + 3\, x_o \cdot \varepsilon + \varepsilon^2$$

cuando

$$\varepsilon \longrightarrow 0 \; (\longrightarrow \text{ : TIENDE A})$$

por tanto, los números $3\, x_o \cdot \varepsilon$ y ε^2 son tan pequeños frente a $3\, x_o^2$ que los podemos despreciar (si por ejemplo, $x_o = 4$ y $\varepsilon = 10^{-35}$; $3\, x_o^2 = 48$,, $3\, x_o \cdot \varepsilon = 12 \cdot 10^{-35}$,, $\varepsilon^2 = 10^{-70}$).

Luego podemos decir que

$$y'_{xo} = 3\, x_o^3$$

Con lo que la ecuación de la función derivada de f es:

$$\boxed{y' = 3\, x^2}$$

Normalmente, a la función derivada de f se la designa por f'.

Si ahora, siguiendo las instrucciones de los ejemplos anteriores, quisiéramos obtener una primitiva de la función f' de ecuación $y' = 3\,x^2$, de una manera experimental, como en los ejemplos anteriores, nos encontraremos que para calcular una ordenada de la función primitiva, por ejemplo, la que corresponde a la abscisa x_0, tendríamos que calcular el área que encierra f' con el eje x y las ordenadas en 0 y x_0, es decir, si g es la primitiva de f' que pasa por el origen (entonces $g(o) = 0$) tendríamos que calcular:

$$\int_0^{x_0} f' = g(x_0)$$

y como la función $y' = 3\,x^2$ tiene como gráfica a una curva, parecida a la de ecuación $y = x^2$ del ejemplo anterior (pues cualquier ordenada de la primera se obtiene multiplicando por 3 la correspondiente ordenada de la 2.ª), ya se comprende que no podemos calcular este área por métodos elementales; sin embargo, tenemos un método que sí nos permite hacerlo, y es que si de antemano conocemos una primitiva de f', como, por ejemplo, la función f de ecuación $y = x^3$, ya que si la función derivada de f es f', entonces una función primitiva de f' es f.) Por tanto, el área que buscábamos es:

$$\int_0^{x_0} f' = f(x_0) - f(o) \Leftrightarrow \int_0^{x_0} 3\,x^2 = x_0^3 - 0^3 = x_0^3$$

(Aquí hemos aplicado la regla de Barrow, sin saber si es cierta para este ejemplo o no, pero más tarde probaremos que se cumple para cualquier función.)

Así, pues, para calcular cualquier área de una función, NECESITAMOS conocer previamente una primitiva de esa función.

Vamos a hacer un resumen de estos tres ejemplos, manejando una función cualquiera f, de ecuación $y = f(x)$, así como una primitiva de la misma, F, de ecuación $y = F(x)$.

Dada la función F, su función derivada f, se puede calcular de la siguiente forma:

Tomemos una abscisa x_0, y elijamos un número ε, todo lo pequeño que queramos. Al conocer la ecuación de F, podemos calcular $y_{x_0} = F(x_0)$ e $y_{x_0+\varepsilon} = F(x_0 + \varepsilon)$, entonces la ordenada de f en el punto x_0 es:

$$f(x_0) = \frac{F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)}{\varepsilon}, \text{ cuando } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Al número $f(x_0)$ se le llama DERIVADA DE LA FUNCION F EN EL PUNTO DE ABSCISA x_0.

Cuando x_0 lo tomamos variable por el eje x, el número $f(x_0)$ nos define las ordenadas en cada punto de la función derivada, es decir, obtenemos la ecuación de la función f, función derivada de F : $y = f(x)$.

Otro problema es: dada la función f, obtener una de sus primitivas.

Hasta ahora sólo sabemos calcular las primitivas de funciones fáciles, como las de los dos primeros ejemplos, pero ¿tenemos algún método que nos permita calcular una primitiva de cualquier función? La respuesta es afirmativa, al menos tenemos un método «en potencia» y consistiría en *calcular las funciones derivadas del mayor número posible de funciones, puesto que derivadas sabemos, al menos, que hay que hacer para calcularlas; así que si necesitamos la primitiva de una función* f, *si ésta se encuentra entre las funciones derivadas calculadas, sólo tendríamos que mirar a la función de donde la obtuvimos y ésta sería una primitiva de* f (*por definición, función primitiva de una función* f *es una función tal que su función derivada coincide con* f).

A primera vista parece imposible que se puedan calcular tantas funciones derivadas, ya que hay una infinidad de funciones, pero ya se demostrará (cuando proceda) que todo lo que necesitamos conocer son las funciones derivadas de unas 25 ó 30 funciones claves, para conocer la función derivada (y la función integral) de cualquier función.

El que dos primitivas de una misma función f se diferencian en una función constante es fácil:

Sean F y G, de ecuaciones $y = F(x)$,, $y = G(x)$, dos primitivas de la función f. Por definición de función derivada:

$$\forall x_0 \;,,\; f(x_0) = \frac{F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0)}{\varepsilon}, \text{ cuando } \varepsilon \longrightarrow 0$$

$$,,\; f(x_0) = \frac{G(x_0 + \varepsilon) - G(x_0)}{\varepsilon}, \text{ cuando } \varepsilon \longrightarrow 0$$

(como el número ε se elige con mucha arbitrariedad, podemos tomar el mismo ε para las dos primitivas).

Resulta entonces, igualando:

$$\forall x_0 : F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0) = G(x_0 + \varepsilon) - G(x_0)$$

y por tanto:

$$\underline{\forall x_0} : F(x_0 + \varepsilon) - G(x_0 + \varepsilon) = F(x_0) - G(x_0)$$

luego como esto se cumple siempre $\forall x_0$, tendremos que la diferencia entre las ordenadas de F y G, correspondientes a una misma abscisa x_0, es siempre la misma, es decir:

$$\forall x_0 : F(x_0) - G(x_0) = (\text{constante})$$

luego

$$\forall x_0 : F(x_0) = G(x_0) + K$$

es decir:

$$\underline{F = G + C}$$

donde C es la función constante tal que

$$\forall x \quad C(x) = K$$

Falta, por último, relacionar la primitiva F, de una función f, con el área que f encierra con el eje x y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$.

De los ejemplos vistos anteriormente se deduce que, en general:

$$\int_a^{x_0} f = F(x_0) - F(a).$$

Vamos a justificar esto.

Tendremos que ver que la función que se simboliza con

$$\int_a^{x} f$$

es una primitiva de f, para que podamos decir que se diferencia en una constante $(F(a))$ con la función F. Esta función

$$\int_a^{x} f$$

que tratamos es la que a la abscisa x_0 le corresponde la ordenada

$$\int_a^{x_0} f$$

(área que encierra f con el eje x, etc.).

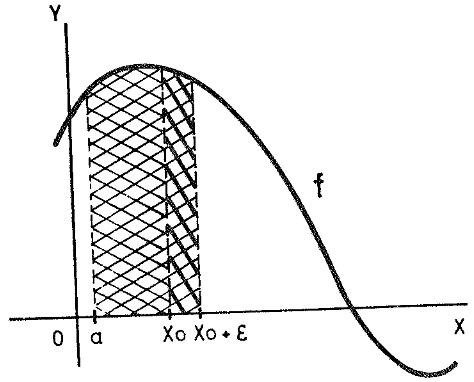
Vamos a hallar su función derivada:

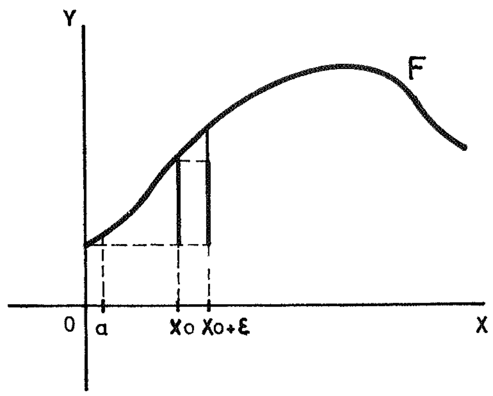
Ordenada en x_0:

$$\int_a^{x_0} f$$

Ordenada en $x_0 + \varepsilon$:

$$\int_a^{x_0 + \varepsilon} f$$





Diferencia de las mismas:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} f \text{ (ver figura)}$$

Derivada en x_0:

$$\frac{\int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} f}{\varepsilon}$$

cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Ahora bien, el recinto rayado más grueso es el de área

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f$$

y cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, este recinto es prácticamente un rectángulo de base ε y de altura $f(x_0)$, luego su área es $\varepsilon \cdot f(x_0)$, luego

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f = \varepsilon \cdot f(x_0) \Longrightarrow f(x_0) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f}{\varepsilon} \quad (\text{si } \varepsilon \rightarrow 0)$$

Luego, la función derivada de la función

$$\int_{a}^{x} f$$

es f, y por tanto es una primitiva de f; y si F es otra primitiva, resulta que se diferencian en una constante, luego:

$$\int_{a}^{x} f = \mathrm{F}(x) + \mathrm{K} \quad \cdot \quad \text{Calculemos K:}$$

Se comprende sin esfuerzo que

$$\int_{a}^{a} f = 0$$

luego

$$\mathrm{F}(a) + \mathrm{K} = 0 \Longrightarrow \mathrm{K} = -\mathrm{F}(a)$$

Luego, en general,

$$\int_{a}^{x_0} f = \mathrm{F}(x_0) - \mathrm{F}(a)$$

y, por tanto, para $x_0 = b$, tendremos:

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a)}$$

(esta expresión y la anterior indican lo mismo).

Ya está justificada la relación existente entre el área encerrada por f, el eje x y las ordenadas en a y en b con una primitiva de la función f.

Haga el alumno, como ejercicio, la comprobación de que el cálculo del área

$$\int_a^b f$$

no depende de la función primitiva que se elija.

Ejercicio 11

Demostrar que la función derivada de una función constante cualquiera es la función nula.

Ejercicio 12

Demostrar que la función derivada de una función de ecuación: $y = m\,x + n$ es la función constante de ecuación $y = m$ (la ordenada de cualquier abscisa es siempre el número m).

¿Cuál es la función integral de la función $y = 3$?

Si llamamos f a la función de ecuación $y = 2$, calcular, aplicando la regla de Barrow, el área

$$\int_{-1}^{5/3} f$$

Calcular también la primitiva que pasa por (3,2).

(Como vemos, todo lo que falta para completar este trabajo es usar la palabra *límite* en la definición de derivada; y, naturalmente, obtener propiedades de la derivada, así como la tabla de las derivadas. Todo esto lo podemos hacer por el método clásico. Creo que lo expuesto aquí puede servir como principio del Cálculo Integral.)