SOBRE LA APLICACION DEL TEOREMA DE PICARD A UNA ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN n

por

MANUEL IGLESIAS CEREZAL

ENUNCIADO DEL TEOREMA DE PICARD PARA UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL VECTORIAL DE PRIMER ORDEN

Consideremos la ecuación diferencial vectorial de primer orden:

$$\overline{y}' = \overline{F}(x, \overline{y}) \qquad [1]$$

donde $\overline{F}$ es una función definida en un cierto dominio $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Supongamos que sobre el espacio vectorial real n-dimensional $\mathbf{R}^n$, se ha definido una cierta norma que notaremos por $\| \quad \|$, y que si el punto $(x_0, \overline{y_0})$ pertenece a D, el hiperrectángulo

$$R : | x - x_0 | \leqslant a \, , \| \overline{y} - \overline{y}_0 \| \leqslant b$$

está contenido en D.

Formulemos las siguientes hipótesis:

a) $\overline{F}(x, \overline{y})$ es continua sobre R.

b) De *a*) se deduce que $\overline{F}$ es acotada sobre R. Sea, por tanto,

$$\| \overline{F}(x, \overline{y}) \| \leqslant M \; (M > 0) \, , (x, \overline{y}) \in R.$$

c) $\overline{F}(x, \overline{y})$ es Lipschitciana en R. Esto es para toda terna $(x, \overline{y}^*, \overline{y}^{**})$, tal que $(x, \overline{y}^*), (x, \overline{y}^{**}) \in R$ existe una constante $K > 0$, tal que:

$$\| \overline{F}(x, \overline{y}^*) - \overline{F}(x, \overline{y}^{**}) \| \leqslant K \| \overline{y}^* - \overline{y}^{**} \|$$

TEOREMA 1 (Picard). Dada la Ecuación Diferencial [1], si $\overline{F}$ verifica las hipótesis *a*), *b*) y *c*) existe una función vectorial $\overline{\varphi}(x)$, y sólo una definida sobre el intervalo $I = [x_0 - r, x_0 + r]$, tal que $\overline{\varphi}(x_0) = \overline{y}_0$, siendo

$$r < \text{mín}\left(a\,,\frac{b}{M}\,,\frac{1}{K}\right)\ (^*).$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN n

Consideremos ahora la Ecuación diferencial de orden n en la forma normal

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad [E]$$

donde f es una función continua definida en un cierto dominio $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

Definición 1. Decimos que la función $\varphi(x)$ es una solución de [E] sobre un cierto intervalo I, si $\varphi(x)$ cumple las siguientes condiciones:

i) $\varphi(x)$ es continua sobre I y posee n derivadas continuas sobre I.

ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{n-1}(x)) \in D\ (\forall\, x \in I)$.

iii) $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))\ (\forall\, x \in I)$.

Sea

$$(x_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (x_0, \overline{\xi}) \in D, \text{ con } x_0 \in I.$$

La solución $\varphi(x)$ decimos que es una *solución particular* que pasa por el punto $(x_0, \overline{\xi}) \in D$, si se verifica la condición

$$\varphi(x_0) = \xi_1, \varphi'(x_0) = \xi_2, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = \xi_n$$

Definición 2. A $(x_0, \overline{\xi}) \in D$ se lel llama «una condición inicial». Un «problema con valores iniciales» para la Ecuación (E), consiste en determinar una solución de (E) sobre un cierto intervalo I, que verifique:

$$\begin{aligned} & y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \\ & y(x_0) = \xi_1 \\ & y'(x_0) = \xi_2 \\ & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ & y^{(n-1)}(x_0) = \xi_n \end{aligned} \qquad [2]$$

(*) Puede verse, por ejemplo, EINAR HILLE: *Lectures on Ordinary Differential Equations.* Addison-Wesley.

Reducción de una Ecuación Diferencial de orden n, a un sistema de primer orden

Dada la Ecuación diferencial [E] hagamos

$$(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad [3]$$

Por derivación de los dos miembros de [3] se obtiene:

$$(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = (y_2, y_3, \ldots, f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad [4]$$

y llamando

$$\overline{y}' = (y'_1, \ldots, y'_n), \overline{\mathrm{F}}(x, \overline{y}) = (\mathrm{F}_1(x, \overline{y}), \ldots, \mathrm{F}_n(x, \overline{y})) = (y_2, \ldots, f(x, \overline{y}))$$

[4] puede escribirse brevemente:

$$\overline{y}' = \overline{\mathrm{F}}(x, \overline{y}) \qquad [\mathrm{S}]$$

Tratemos ahora de demostrar que la Ecuación [E] y el sistema [S] son equivalentes y que la función f transmite a la función vectorial $\overline{\mathrm{F}}$ algunas de sus propiedades: continuidad, carácter lipschitciano, etc.

Teorema 2. Si $\varphi(x)$ es una solución de [E] sobre un intervalo I, la función vectorial $\overline{\Phi}(x) = (\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$ es una solución de [S] sobre el intervalo I.

La demostración es evidente, teniendo en cuenta la definición 1 y las igualdades [3] y [4].

Teorema 3. Si la función vectorial $\overline{\Phi}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ es una solución del sistema [S] sobre un intervalo I, la primera componente $\varphi_1(x)$ es una solución de [E] sobre I.

En efecto, por ser $\overline{\Phi}(x)$ una solución de [S] sobre I se tendrá, teniendo en cuenta [4]:

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1(x) \\ \varphi'_2(x) \\ \cdots \\ \cdots \\ \varphi'_{n-1}(x) \\ \varphi'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \\ \cdots \\ \cdots \\ \varphi_n(x) \\ f(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \end{pmatrix} \quad x \in \mathrm{I}$$

y por tanto:

$$\varphi'_1(x) = \varphi_2(x)$$
$$\varphi''_1(x) = \varphi'_2(x) = \varphi_3(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_1^{(n-1)}(x) = \varphi_2^{(n-2)}(x) = \cdots = \varphi'_{n-1}(x) = \varphi_n(x)$$
$$\varphi_1^{(n)}(x) = \varphi_2^{(n-1)}(x) = \cdots = \varphi'_n(x) = f(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

de donde se deduce que:

$$\varphi_1^{(n)}(x) = f(x, \varphi_1(x), \varphi_1'(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x)) \qquad (x \in \mathrm{I})$$

NORMAS SOBRE $\mathbf{R}^n$

Recordemos la definición de norma:

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K (que puede ser real o complejo). Recibe el nombre de norma sobre V, toda aplicación $\| \quad \|$: $: V \to \mathbf{R}$, que cumple las siguientes propiedades:

N1 Si $\overline{x} \in V$ $\|\overline{x}\| \geqslant 0$. $\|\overline{x}\| = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{0}$.

N2 Si $k \in K$, $\overline{x} \in V$ $\|k\overline{x}\| = |k| \, \|\overline{x}\|$.

N3 Si $\overline{x}, \overline{y} \in V$, $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leqslant \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$.

Sobre el espacio vectorial R^n es posible definir varias normas. Las más usuales son:

$$\|\overline{x}\|_2 = \left(\sum_1^n |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\|\overline{x}\|_1 = \sum_1^n |x_i| \qquad \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \tag{5}$$

$$\|\overline{x}\|_\infty = \sup |x_i|$$

Es fácilmente comprobable que se cumplen en los tres casos las propiedades N1, N2 y N3 de la definición.

Observación

En todo lo que sigue será utilizada, para el desarrollo de algunas demostraciones, la norma $\| \quad \|_1$ definida en [5], a la cual, por no existir peligro de confusión, la seguiremos notando por $\| \quad \|$.

Teorema 4. Dada la ecuación diferencial [E], si f es continua en el hiperrectángulo

$$R : |x - x_0| \leqslant a, \|\overline{y} - \overline{y}_0\| \leqslant b,$$

la función $\overline{F}$ de [S] es continua en R.

Es consecuencia inmediata de la definición de $\overline{F}$, dada en [4].

Teorema 5. Si la función f de [E] está acotada en R, es decir, si existe un $N > 0$ tal que $|f(x, \overline{y})| \leqslant N \; \forall (x, \overline{y}) \in R$, entonces la función $\overline{F}$ de [S] está acotada en R, y una cota de $\overline{F}$ en R es

$$M = N + b + \|\overline{y}_0\|.$$

En efecto, para $(x, \overline{y}) \in R$ se tiene que:

$$\| \overline{F}(x. \overline{y}) \| = \sum_{i=1}^{n} | F_i (x, \overline{y}) | = | y_2 | + | y_3 | + \ldots +$$

$$+ | y_n | + | f(x, \overline{y}) | \leqslant \| \overline{y} \| + N$$

pero teniendo en cuenta que

$$\| \overline{y} \| - \| \overline{y_0} \| \leqslant \| \overline{y} - \overline{y_0} \| \leqslant b,$$

se deduce que

$$\| \overline{y} \| \leqslant \| \overline{y_0} \| + b \, , (x, \overline{y}) \in R$$

Y por tanto:

$$\| \overline{F}(x, \overline{y}) \| \leqslant N + b + \| \overline{y_0} \|.$$

Definición 3. Decimos que la función $f(x, \overline{y})$ es lipschitciana en el hiperrectángulo R, si para toda terna

$$(x, \overline{y}^* \, , \overline{y}^{**})$$

tal que

$$(x, \overline{y}^*) \text{ y } (x, \overline{y}^{**}) \in R,$$

existe una constante $L > 0$ que verifica:

$$| f(x, \overline{y}^*) - f(x, \overline{y}^{**}) | \leqslant L \| \overline{y}^* - \overline{y}^{**} \|$$

L recibe el nombre de constante de Lipschitz de $f(x, \overline{y})$ en R.

Teorema 6. Si $f(x, \overline{y})$ admite las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en R, y están acotadas, la función f es lipschitciana respecto de $\overline{y}$ en R, y una constante de Lipschitz de f en R es

$$L = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial y_i} (x, \overline{y}) \right| \qquad (x, \overline{y}) \in R, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

En efecto, tanto f como R están en las condiciones del Teorema del valor medio. Aplicando éste se tiene:

$$f(x, \overline{y}^*) - f(x, \overline{y}^{**}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} (x, \overline{\xi}) (y_i^* - y_i^{**}) \qquad (\overline{y_i}^* \leqslant \overline{\xi_i} \leqslant \overline{y_i}^{**})$$

de donde:

$$| f(x, \bar{y}^*) - f(x, \bar{y}^{**}) | \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial y_i} \right| | y_i^* -$$

$$- y_i^{**} | \leqslant L \sum_{i=1}^{n} | y_i^{**} - y_i^{**} | = L \, || \bar{y}^* - \bar{y}^{**} ||$$

con las derivadas parciales tomadas en algún punto de R.

Teorema 7. Si la función $f(x, \bar{y})$ es Lipschitciana respecto de $\bar{y}$ en R, y L es una constante de Lipschitz. Entonces la función vectorial asociada $\bar{F}(x, \bar{y})$ es Lipschitciana respecto de $\bar{y}$ en R, pudiéndose tomar $K = L + 1$ como una constante de Lipschitz de $\bar{F}$ en R.

En efecto, para

$$(x, \bar{y}^*) \text{ y } (x, \bar{y}^{**}) \in R$$

se verifica:

$$|| \bar{F}(x, \bar{y}^*) - \bar{F}(x, \bar{y}^{**}) || = \sum_{i=1}^{n} | F_i(x, \bar{y}^*) - F_i(x, \bar{y}^{**}) | =$$

$$= | y_2^* - y_2^{**} | + | y_3^* - y_3^{**} | + \ldots + | y_n^* - y_n^{**} | +$$

$$+ | f(x, \bar{y}^*) - f(x, \bar{y}^{**}) | \leqslant || \bar{y}^* - \bar{y}^{**} || + L \, || \bar{y}^* -$$

$$- \bar{y}^{**} || = (L + 1) \, || \bar{y}^* - \bar{y}^{**} ||.$$

Teorema 8. (Existencia y unicidad.)

Dada la ecuación diferencial de orden n:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad [E]$$

y el hiperrectángulo:

$$R : | x - x_0 | \leqslant a, \; || \bar{y} - \bar{y}_0 || \leqslant b, \; \bar{y}_0 = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

supongamos que f cumple las siguientes condiciones:

i) f es continua en R.

ii) $| f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) | \leqslant N, \; \forall (x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in R$.

iii) f es Lipschitciana respecto de $\bar{y} = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ en R, siendo L una constante de Lipschitz.

Entonces, existe una función $y = \varphi(x)$ y sólo una, definida sobre el intervalo

$$I = [x_0 - r, x_0 + r],$$

tal que:

$$\varphi(x_0) = \xi_1 , \varphi'(x_0) = \xi_2 , \ldots\ldots , \varphi^{(n-1)}(x_0) = \xi_n,$$

siendo

$$r < \text{mín}\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right)$$

donde

$$M = N + b + \| y_0 \| , y \qquad K = L + 1$$

Demostración.—Consideremos el sistema:

$$\overline{y}' = \overline{F}(x, \overline{y}) \qquad [S]$$

asociado a [E] y construido como se indica en [4] y [5].

Por satisfacer f las condiciones *i*), *ii*) y *iii*) se deduce que $\overline{F}$ verifica las hipótesis *a*, *b*) y *c*) del teorema 1 (según se ha demostrado en los teoremas 4, 5 y 7).

Por tanto, tomando

$$M = N + b + \| y_0 \| \; y \; K = L + 1$$

podemos asegurar que existe una función vectorial $\overline{\varphi}(x)$, y sólo una, definida sobre el intervalo I, y tal que $\overline{\varphi}(x_0) = \overline{y}_0$.

Por el teorema 3 sabemos que la primera componente, $\varphi_1(x)$, es la solución de [E] sobre el intervalo I, que verifica:

$$\varphi_1(x_0) = \xi_1$$

$$\varphi_1'(x_0) = \varphi_2(x_0) = \xi_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_1^{(n-1)}(x_0) = \varphi_n(x_0) = \xi_n$$

Iterantes de Picard

Consideremos de nuevo la Ecuación diferencial vectorial dada en [1]

$$\overline{y}' = \overline{F}(x, \overline{y})$$

y supongamos que F verifica las hipótesis del teorema 1.

Definimos, sobre el intervalo I, las iterantes de Picard para dicha Ecuación, mediante la siguiente ley recurrente:

$$\bar{\varphi}_0(x) = \bar{y}_0 \qquad \bar{y}_0 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$\bar{\varphi}_m(x) = \bar{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \bar{F}(t, \bar{\varphi}_{m-1}(t))\, dt \tag{6}$$

Si llamamos $\varphi_i^j(x)$ a la componente j-ésima de la iterante i-ésima, la ley recurrente [6] puede ser escrita en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0^1(x) \\ \varphi_0^2(x) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \varphi_0^n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_m^1(x) \\ \varphi_m^2(x) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \varphi_m^n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 + \int_{x_0}^{x} F_1(t, \varphi^1{}_{m-1}(t), \varphi^2{}_{m-1}(t), \dots, \varphi^n{}_{m-1}(t))\, dt \\ \xi_2 + \int_{x_0}^{x} F_2(t, \varphi^1{}_{m-1}(t), \varphi^2{}_{m-1}(t), \dots, \varphi^n{}_{m-1}(t))\, dt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n + \int_{x_0}^{x} F_n(t, \varphi^1{}_{m-1}(t), \varphi^2{}_{m-1}(t), \dots, \varphi^n{}_{m-1}(t))\, dt \end{bmatrix} \tag{7}$$

Dada la Ecuación diferencial [E] y construido el sistema [S] asociado a [E] como se indica en [3] y [4]; aplicando la ley recurrente [7] podemos construir las iterantes de Picard para [S], que en este caso particular adoptan una forma bastante sencilla.

En efecto, puesto que según [4]:

$$\bar{F} = (y_2, y_3, \dots, y_n, f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

las iterantes de Picard para [S] verifican la siguiente ley recurrente:

$$\overline{\varphi}_0(x) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi^1_m(x) \\ \varphi^2_m(x) \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \varphi^{n-1}_m(x) \\ \varphi^n_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 + \int_{x_0}^{x} \varphi^2{}_{m-1}(t)dt \\ \xi_2 + \int_{x_0}^{x} \varphi^3{}_{m-1}(t)dt \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{n-1} + \int_{x_0}^{x} \varphi^n{}_{m-1}(t)dt \\ \xi_n + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi^1{}_{m-1}(t), \ldots, \varphi^n{}_{m-1}(t))dt \end{bmatrix} \qquad [8]$$

Teniendo en cuenta los teoremas [2] y [3], el primer elemento de las matrices [8] constituye las aproximaciones para la solución de la ecuación diferencial [E], que verifica las condiciones [2]. Por tanto, dada la Ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots . y^{(n-1)}) \qquad [E]$$

podemos —teniendo en cuenta [8]— escribir para el problema de valores iniciales [2] la siguiente ley recurrente para las iterantes de Picard de la Ecuación diferencial [E].

$$\varphi^1{}_0(x) = \xi_1$$

$$\varphi^1{}_m(x) = \xi_1 + \int_{x_0}^{x} \varphi^2{}_{m-1}(t)dt.$$