INTRODUCCION DEL CALCULO INTEGRAL

(Continuación)

por

MANUEL RUIZ DOMINGUEZ

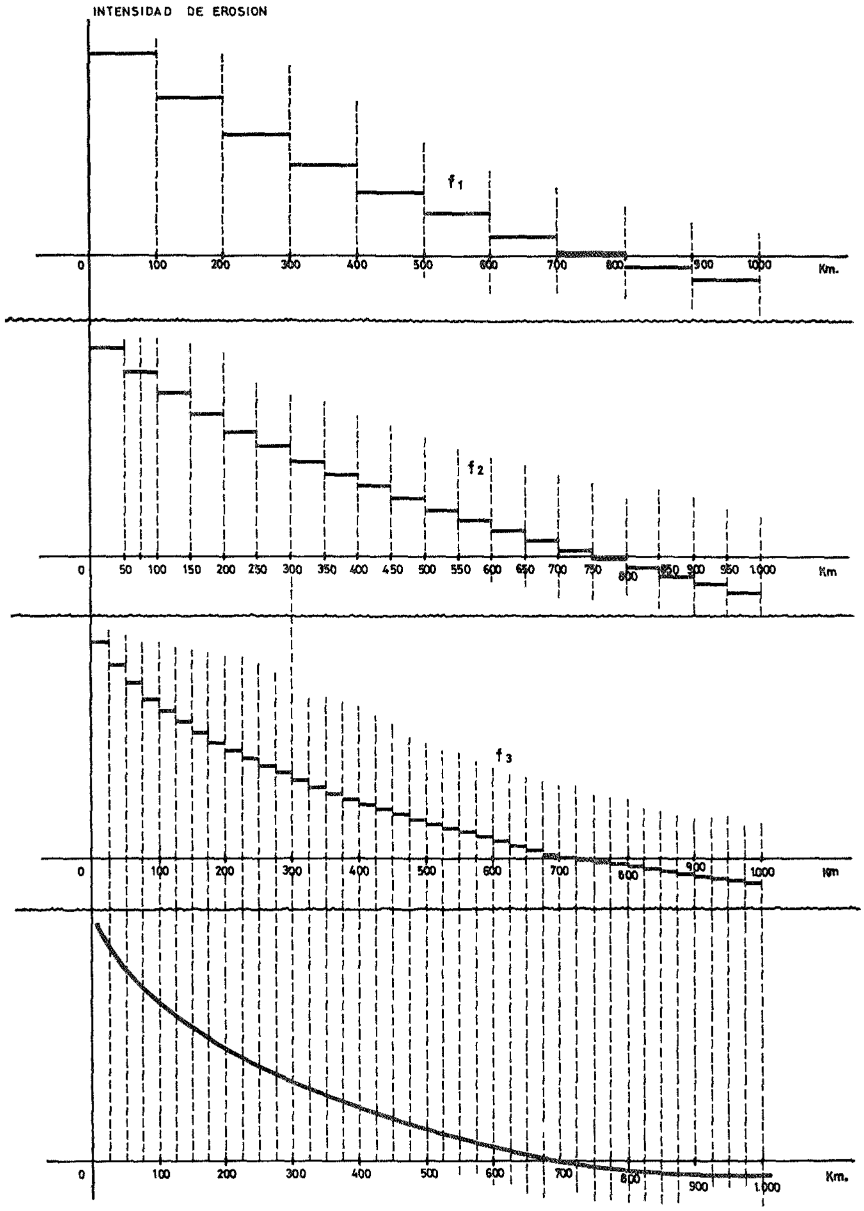
APROXIMACION DE UNA FUNCION CUALQUIERA CON FUNCIONES ESCALONADAS

Pensemos en un río cualquiera, que tenga una longitud de 1.000 kilómetros, por ejemplo, y del que queremos conocer, en cada momento, la intensidad de su erosión o su sedimentación a lo largo de todo su curso. Todos sabemos que el curso de un río se divide en tres partes: TRAMO ALTO, en el que hay una gran intensidad erosiva; TRAMO MEDIO, en el que tenemos poca erosión y principio de sedimentación, y TRAMO INFERIOR, en él, la erosión es prácticamente nula y hay mucha sedimentación. Con un pequeño esfuerzo de imaginación podemos considerar la sedimentación como una erosión negativa.

En un año determinado, por ejemplo, en 1960, se hacen mediciones de la erosión, tanto positiva como negativa, a lo largo del curso del río, y se anota el valor de la intensidad de erosión cada: 100 Km, hallando la media de las medidas hechas en esos 100 Km. Supongamos que las medidas anotadas se ajustan a la gráfica de f_1; tanto en ésta como en las tres que le siguen, sobre el eje vertical medimos la intensidad de erosión, y sobre el horizontal medimos las distancias al nacimiento del río (origen). Ya se comprende que cuanto más cerca estemos del nacimiento, mayor es la erosión, y cuanto más cerca de la desembocadura, mayor es la sedimentación.

A los cinco años (en 1965) se efectúa la misma operación, pero ahora se anota cada 50 Km, obteniéndose así la gráfica f_2.

Repetimos el proceso en 1970, pero anotando cada 25 Km, obtenemos así la gráfica de f_3. Se puede proseguir así indefinidamente, obteniéndose gráficas de funciones escalonadas, cuyos «escalones» son cada vez más estrechos, y la diferencia de intensidad entre dos escalones consecutivos, en valor absoluto, se va haciendo cada vez más pequeña; se verifica, además, que $| f_i(x) - f_j(x) |$ para cada abscisa x se va ha-



ciendo cada vez más pequeño, a medida que se vayan obteniendo más funciones.

¿Qué pasará si seguimos obteniendo funciones escalonadas por este procedimiento, empequeñeciendo los intervalos donde hacemos las mediciones? La gráfica de f_3 ya parece que nos indica algo de lo que ocurrirá si seguimos obteniendo más funciones.

¿Podríamos dibujar una curva que nos diera, con bastante aproximación, el valor de la intensidad de erosión en cada punto del trayecto del río? La respuesta a esta pregunta está en la cuarta gráfica, que ya no es la gráfica de una función escalonada, pero que, según como la hemos obtenido, podemos encontrar una función escalonada, cuya gráfica se aproxime a la cuarta tanto como queramos, para ello bastaría tomar suficientemente pequeños los intervalos de las abscisas, es decir, hacer las mediciones, por ejemplo, cada Km, o si se quiere más aproximación, haríamos las mediciones cada 100, 10 ó 1 m, naturalmente en teoría, pero, por la imperfección de los instrumentos de dibujo, no podemos hacerla en la práctica.

EJEMPLO 12

Un ciclista sale a las 5 de la mañana desde el Km 0 de la Puerta del Sol, para hacer un cierto recorrido midiendo la distancia que le separa del punto de partida:

Primero lo hace cada dos horas de la siguiente forma: en cada intervalo de dos horas, hace varias medidas, calculando la media, que es lo que anota de recorrido en esas dos horas.

Al día siguiente repite el proceso pero anotando las mediciones cada hora.

Hace lo mismo el tercer día, pero anotando cada media hora. Así puede seguir indefinidamente.

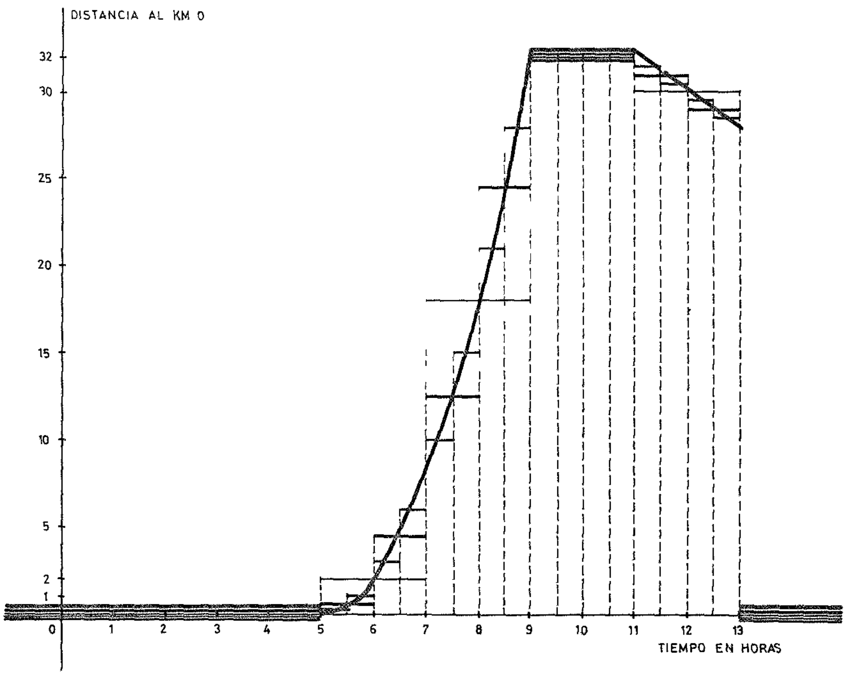
Supongamos que las notas que tomó responden a las tablas que siguen:

1er día: f_1	Antes de 5 h. : 0 Km.	De 9 h. a 11 h. : 32 Km.
	De 5 h. a 7 h. : 2 Km.	De 11 h. a 13 h. : 30 Km.
	De 7 h. a 9 h. : 18 Km.	Después de 13 h. : 0 Km. (vuelve en tren)

2.º día f_2	Antes de 5 h. : 0 Km.	De 10 h. a 11 h. : 32 Km.
	De 5 h. a 6 h. : $\frac{1}{2}$ Km.	De 11 h. a 12 h. : 31 Km.
	De 6 h. a 7 h. : $\frac{9}{2}$ Km.	De 12 h. a 13 h. : 29 Km.
	De 7 h. a 8 h. : $\frac{25}{2}$ Km.	Después de 13 h. : 0 Km.
	De 8 h. a 9 h. : $\frac{49}{2}$ Km.	
	De 9 h. a 10 h. : 32 Km.	

3er día f_3	Antes de 5 h. : 0 Km.	De 9 h. a 9 h. 30 min. : 32 Km.
	De 5 h. a 5 h. 30 min. : $\frac{1}{8}$ Km.	De 9 h. 30 min. a 10 h. : 32 Km
	De 5 h. 30 min. a 6 h. : 1 Km.	De 10 h. a 10 h. 30 min.:32 Km
	De 6 h. a 6 h. 30 min. : 3 Km.	De 10h. 30 min. a 11h.: 32 Km
	De 6 h. 30 min. a 7 h. : 6 Km.	De 11h a 11h 30 min.: 31,5 Km
	De 7 h. a 7h. 30 min. : 10 Km.	De 11h 30 min. a 12h: 30,5 Km
	De 7 h. 30 min. a 8 h. : 15 Km.	De 12h a 12h 30 min.: 29,5 Km
	De 8 h. a 8 h. 30 min. : 21 Km.	De 12h 30 min. a 13h.: 28,5Km
	De 8 h. 30 min. a 9 h. : 28 Km.	Después de 13 h. : 0 Km.

Como puede suponerse, estas tres tablas corresponden a tres funciones escalonadas, que las representaremos en una misma grafica:



Ya se comprende que podríamos seguir poniendo funciones escalonadas, pero, al mismo tiempo, se ve que éstas se van complicando cada vez más, puesto que el número de escalones de cada función es doble del que tiene la función anterior, pero creo que no es necesario dibujar una cuarta función o, por lo menos, no escribir su correspondiente tabla, pues constaría de 38 intervalos, de todas formas sí se puede dibujar una aproximación en la misma gráfica, pero no la hacemos por no recargar demasiado el dibujo.

La idea que perseguimos está lograda, y es que esta SUCESION de funciones escalonadas se aproxima cada vez más a la función f, cuya gráfica está dibujada con trazo más grueso; esto último, en Matemáticas, se suele decir:

«La sucesión de funciones: $f_1, f_2, f_3, \ldots$ TIENDE A LA FUNCION f» o esquemáticamente: «$f, f_2, f_3, \ldots \longrightarrow f$».

Naturalmente, esto no ocurre siempre, es decir, que cualquier sucesión de funciones escalonadas no tiene por qué aproximarse a una función determinada. Para que esto ocurra la sucesión de funciones escalonadas debe cumplir ciertos requisitos. Vamos a tratar de explicar qué debe cumplir la sucesión de funciones para que exista una función a la que se aproxima la sucesión:

Supongamos que la sucesión de funciones es:

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots\ldots$$

(la sucesión no acaba nunca). Para que se cumpla que

$$f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots \longrightarrow f \text{ (función cualq.)}$$

es *necesario* y *suficiente* que $\forall x \in Q$ (o $\forall\, x \in R$), el valor absoluto de la diferencia: $f_p(x) - f_q(x)$ sea cada vez más cercano a 0, a medida que p y q crecen (p y q han de exceder siempre a un cierto número natural, m, que se puede calcular según el acercamiento a 0 que deseemos para $| f_p(x) - f_q(x) |$).

Esquemáticamente:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \longrightarrow f \Longleftrightarrow \forall\, x \in Q \;,,\; | f_p(x) - f_q(x) | \longrightarrow 0$$

siempre que

$$p \text{ y } q > \text{ que un cierto } m \in N.$$

Esto también se suele decir de la siguiente forma:

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \longrightarrow f \Longleftrightarrow \forall \in\, > o\; \varepsilon \in Q \;(o\; R),\; \exists\, m \in N,$$

tal que si

$$p, q > m \Longrightarrow \forall\, x \in Q \;(o\; R)\; | f_p(x) - f_q(x) | < \varepsilon$$

(Quizás sea mejor no decirlo así.)

Este número ε, si lo imaginamos muy pequeño, nos dá la aproximación que ha de haber entre $| f_p(x) - f_q(x) |$ y 0 cuando f_p y f_q son dos funciones de la sucesión $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, lo suficientemente avanzadas para lograr esa aproximación.

No demostraremos con detalle la condición necesaria y suficiente anterior, resulta demasiado complicado. Sólo utilizaremos la imaginación: pensemos que si $| f_p(x) - f_q(x) |$ se aproxima a 0 a medida que f_p y f_q «avanzan» en la sucesión, entonces $f_p(x)$ y $f_q(x)$ son prácticamente iguales; pues bien, este número al que se acercan $f_p(x)$ y $f_q(x)$, para cada $x \in Q$, es (lo definimos así) la imagen, mediante la función f que buscamos, correspondiente al $x \in Q$ que hallamos elegido; con esto tendremos definida la función f; de otra forma:

Definición de f:

$$Q \xrightarrow{f} R$$
$x \longrightarrow f(x) =$ n.º al que se aproxima $f_p(x)$, cuando f_p avanza en la sucesión.

(En fin, esto, por más vueltas que le demos y por mucho que disfracemos el lenguaje, es un concepto muy difícil, que sería mas aconsejable a nivel de universitario.

Démosnos cuenta que la formalización matematica de esto encierra conocimientos bastante complicados de análisis funcional:

— Espacios de funciones (espacios vectoriales normados).
— Sucesiones de funciones. Límite.
— Completitud de E : $\sqsubseteq$ = { funciones segmentarias continuas }.
— E es denso en $\sqsubseteq$.

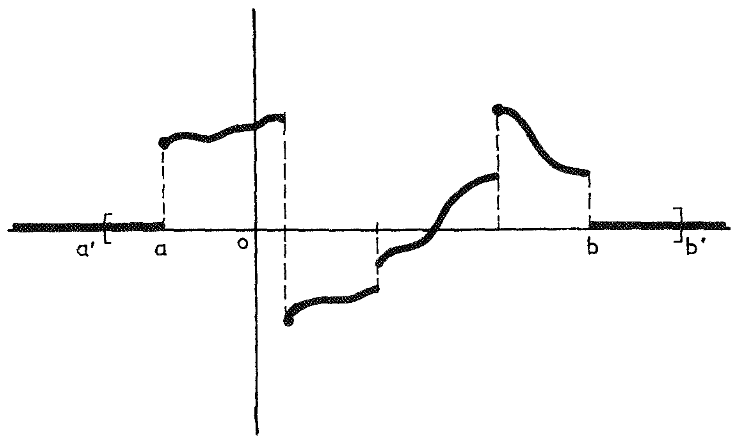
Más que nada, lo que perseguimos es que el chico adquiera una idea intuitiva de que una función cualquiera se puede aproximar con funciones escalonadas, para que así podamos aproximar la integral definida con el área que encierra una función escalonada de una de las posibles sucesiones que tiendan hacia esa función.

A continuación daremos una idea de cómo construir una sucesión de funciones escalonadas que tengan por límite a una función cualquiera dada de antemano.

Después aproximaremos la integral definida de una función cualquiera.)

Vamos a ver cómo construimos una sucesión de funciones escalonadas que tienda hacia una función cualquiera dada.

Esto sólo lo podremos hacer cuando la función de que se trate se anule fuera de un intervalo cerrado $[a, b]$ de Q. Es decir, la función ha de tener, como caso general, una gráfica de la forma:



El intervalor $[a, b]$ puede ser el indicado en la gráfica, pero no es necesario que sea precisamente ese, puede ser también el $[a', b']$.

Para aproximar una función cualquiera $y = f(x)$, con una sucesión de funciones escalonadas, podemos proceder del siguiente modo:

Dividimos el intervalo $[a, b]$ mediante los puntos de abscisas

$$a_0 = a, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = b$$

(los intervalos resultantes $[a_i, a_{i+1}]$ no tienen por qué ser de la misma longitud), si la función $y = f(x)$ tiene puntos de salto, éstos deben estar entre los a_i.

La primera función f_1, de la sucesión, puede ser:

$$f_1(x) = 0, \text{ si } x < a_0 \;,,\; f_1(x) = f\left(\frac{a_0 + a_1}{2}\right), \text{ si } a_0 \leqslant x < a_1 \;,,$$

$$f_1(x) = f\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right), \text{ si } a_1 \leqslant x < a_2 \;,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1(x) = f\left(\frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right), \text{ si } a_{n-1} \leqslant x < a_n$$

$$f_1(x) = 0, \text{ si } a_n \leqslant x$$

donde

$$\frac{a_i + a_{i+1}}{2}$$

es el punto medio del intervalo $[a_i, a_{i+1}]$.

Añadiendo más puntos a los $a_0, a_1, \ldots, a_n$ podremos definir la segunda función f_2 de la sucesión, la definiríamos de manera análoga a la f_1, asignando a cada intervalo que se forma la ordenada del punto medio de la función $y = f(x)$.

Así, por este proceso, se puede construir una sucesión de funciones escalonadas que tienda hacia la función f.

Como aplicación, haremos el ejercicio siguiente:

Ejercicio 7

Aproximar la función que está definida como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \text{ si } x < -1 \\ f(x) &= x^2 + x, \text{ si } -1 \leqslant x < 4 \\ f(x) &= -x, \text{ si } 4 \leqslant x < 8 \\ f(x) &= 0, \text{ si } 8 \leqslant x \end{aligned}$$

por una sucesión de funciones escalonadas, de la cual hay que determinar las tres primeras funciones, representar éstas gráficamente y dibujar como aproximación la función dada.

(Es aconsejable dividir en intervalos iguales.)

APROXIMACION DEL AREA QUE ENCIERRA UNA FUNCION CUALQUIERA POR AREAS DE FUNCIONES ESCALONADAS

EJEMPLO 13

Imaginemos una fuerza que actúa sobre un émbolo, en el mismo sentido del desplazamiento de éste, tratando de comprimir un gas que hay en un recipiente tapado por el émbolo; ya se comprende que es medida que aumenta la presión, se necesita más fuerza para un mismo desplazamiento del émbolo.

Supongamos, por ejemplo, que la fuerza viene expresada por la ecuación $F = d^2$, donde F representa a la fuerza en N*w* y *d* el desplazamiento del émbolo en cm. Se desea calcular el trabajo que se realiza para desplazar el émbolo 6 cm, naturalmente calcularemos una aproximación del valor verdadero, ya que el trabajo viene dado por el área que encierra la gráfica de la función $F = d^2$ (parábola), con el eje *d* (horizontal) y la ordenada $d = 6$. Este área la calcularemos por aproximación de las áreas de una sucesión de funciones escalonadas que tienda hacia la función dada.

Empezaremos dividiendo [0, 6] por los puntos: ;, 2, 4, 6. La primera función de la sucesión responde a la tabla:

$f_1(d) = 0$, N*w*, si $d < 0$	$f_1(d) = 5^2 = 25$ N*w*, si $4 \leqslant d < 6$
$f_1(d) = 1^2 = 1$, N*w*, si $0 \leqslant d < 2$	$f_1(d) = 0$ N*w*, si $6 \leqslant d$
$f_1(d) = 3^2 = 9$ N*w*, si $2 \leqslant d < 4$	

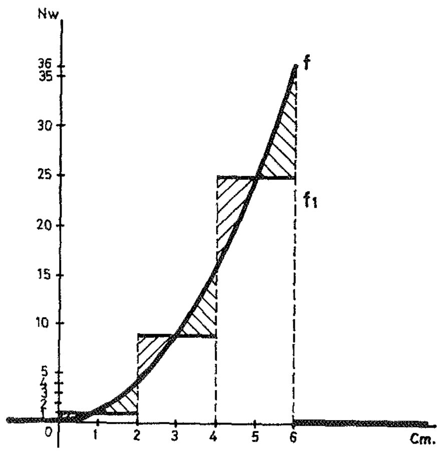
(f_1 está representada en la primera gráfica, junto con la función $F = d^2$.)

El área que encierra esta función es:

$$S_{f_1} = 2 \cdot (1 + 9 + 25) = 70 \text{ N}w \cdot \text{cm}$$

Luego una primera aproximación del trabajo pedido es:

$$\boxed{W_1 = 70 \text{ N}w \cdot \text{cm}}$$



Aunque f_1 es todavía una aproximación deficiente de f : $F = d^2$, sin embargo, el área se comprende que se aproxima bastante: La figura nos dice claramente que las áreas que «sobran» de f y de f_1, en cierto modo se contrarrestan.

Para la 2.ª función, f_2, dividimos cada intervalo en dos partes iguales y asignamos a cada intervalo la ordenada de f en el punto medio:

$$f_2(d) = 0, \text{ si } d < 0$$

$$f_2(d) = \frac{1}{4}, \text{ si } 0 \leqslant d < 1$$

$$f_2(d) = \frac{9}{4}, \text{ si } 1 \leqslant d < 2$$

$$f_2(d) = \frac{25}{4}, \text{ si } 2 \leqslant d < 3$$

$$f_2(d) = \frac{49}{4}, \text{ si } 3 \leqslant d < 4$$

$$f_2(d) = \frac{81}{4}, \text{ si } 4 \leqslant d < 5$$

$$f_2(d) = \frac{121}{4}, \text{ si } 5 \leqslant d < 6$$

$$f_2(d) = 0, \text{ si } 6 \leqslant d$$

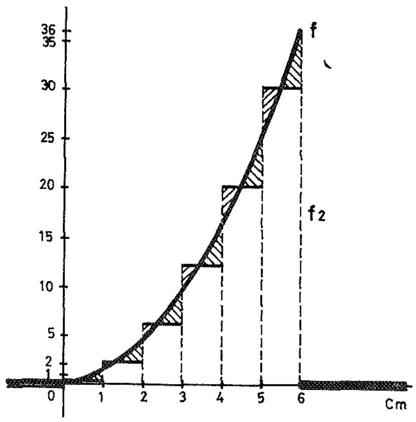
El área que encierra f_2 es:

$$S_2 = 1 \times$$

$$\times \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} + \frac{81}{4} + \frac{121}{4}\right) = 71{,}5 \text{ N}w \cdot \text{cm}$$

La 2.ª aproximación del trabajo es:

$$\boxed{W = 71{,}5 \text{ N}w \cdot \text{cm}}$$



Para la tabla de f_3 hacemos lo mismo que en las dos anteriores:

$$f_3(d) = 0 \,, \text{ si } d < 0$$

$$f_3(d) = \frac{1}{16} \,, \text{ si } 0 \leqslant d < \frac{1}{2}$$

$$f_3(d) = \frac{9}{16} \,, \text{ si } \frac{1}{2} \leqslant d < 1$$

$$f_3(d) = \frac{25}{16} \,, \text{ si } 1 \leqslant d < \frac{3}{2}$$

$$f_3(d) = \frac{49}{16} \,, \text{ si } \frac{3}{2} \leqslant d < 2$$

$$f_3(d) = \frac{81}{16} \,, \text{ si } 2 \leqslant d < \frac{5}{2}$$

$$f_3(d) = \frac{121}{16} \,, \text{ si } \frac{5}{2} \leqslant d < 3$$

$$f_3(d) = \frac{169}{16} \,, \text{ si } 3 \leqslant d < \frac{7}{2}$$

$$f_3(d) = \frac{225}{16} \,, \text{ si } \frac{7}{2} \leqslant d < 4$$

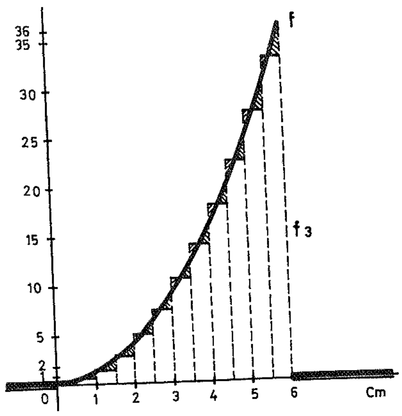
$$f_3(d) = \frac{289}{16} \,, \text{ si } 4 < d < \frac{9}{2}$$

$$f_3(d) = \frac{361}{16} \,, \text{ si } \frac{9}{2} \leqslant d < 5$$

$$f_3(d) = \frac{441}{16} \,, \text{ si } 5 \leqslant d < \frac{11}{2}$$

$$f_3(d) = \frac{529}{16} \,, \text{ si } \frac{11}{2} \leqslant d < 6$$

$$f_3(d) = 0 \,, \text{ si } 6 \leqslant d$$



El área que encierra f_3 es:

$$S_{f_3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} \times (1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 + 169 + 225 + 289 + 361 + 441 + 529)$$

Luego

$$S_{f_3} = \frac{2.300}{32} = 71{,}875 \text{ N}w \times \text{cm}$$

Por lo que la 3.ª aproximación del trabajo pedido es:

$$\boxed{W = 71{,}875 \ \mathrm{N}w \times \mathrm{cm}}$$

Como ya apuntamos antes, en cada gráfica están señaladas las áreas que se contrarrestan, naturalmente no exactamente.

El tercer valor calculado para el trabajo es el que más se aproxima al valor exacto, esto no lo podemos demostrar con detalle, igual que ocurrió cuando hablamos de la sucesión de funciones que tiende hacia una función (condición necesaria y suficiente); la demostración de esto último se basa en aquello; por tanto, igual que allí sólo daremos una idea intuitiva:

A medida que vamos obteniendo funciones escalonadas, más aproximadas a la función, esta misma aproximación hace que las áreas vayan siendo cada vez más aproximadas; naturalmente, el que las aproximaciones obtenidas sean por defecto, sólo depende de la propia función que se quiere aproximar, y de la manera elegida para la obtención de la sucesión.

Podríamos haber seguido calculando aproximaciones, que, si las obtenemos por el mismo método que las tres calculadas, obtendríamos valores para el trabajo más aproximados aún.

Para dar una idea de la aproximación obtenida, diremos que, calculado el valor del trabajo exactamente, es 72 Nw · cm; el procedimiento empleado aún no es asequible.

También se podría haber calculado el trabajo aproximado utilizando otra sucesión de funciones, pero, naturalmente, nos daría una aproximación distinta.

Ya se comprende que para calcular el área aproximada de una función cualquiera, no es necesario calcular tres o cuatro aproximaciones, todo lo que habrá que hacer es dividir el intervalo en varias partes iguales (no es necesario, pero sí aconsejable por la facilidad del cálculo); cuanto más divisiones, más aproximación tendremos, y así calcularemos una sola aproximación.

Actuaremos, pues, de la siguiente manera:

Sea $y = f(x)$ la función de la que queremos calcular aproximadamente el área que encierra con el eje x, y las ordenadas en $x = a$ y en $x = b$; primero dividimos $[a, b]$ por los puntos:

$$a_0 = a \ , \ a_1, \ a_2, \ . \ . \ . \ \ , \ a_{n-1} \ , \ a_n = b$$

Calculamos

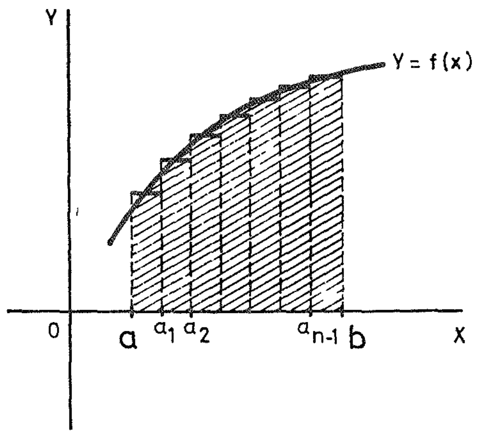
$$f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right), \ i = o \ , \ . \ . \ . \ , \ n - 1$$

son las ordenadas de $y = f(x)$ en los puntos medios de los intervalos $[a_i, \ a_{i+1}]$; y si llamamos

$$h = a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \ . \ . \ . \ = a_n - a_{n-1}$$

entonces la aproximación pedida es:

$$\boxed{S = h \times \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right)}$$



Volvemos a repetir que cuanto mayor es n, mejor será la aproximación para el área pedida.

Así podemos obtener aproximaciones con muy poco error, pero nunca obtendremos el área exacta, esta es la causa por la que se ha pensado en otro procedimiento que nos dá el área exacta y sin necesidad de hacer tanto cálculo, sin embargo es mucho más complicado que el que acabamos de ver.

Ejercicio 8

Calcular el área aproximada de la función definida en el ejercicio 7, dividiendo el intervalo [—1, 8] en nueve partes.

INTRODUCCION DE LA FUNCION DERIVADA Y DE LA FUNCION INTEGRAL

Ejemplo 14

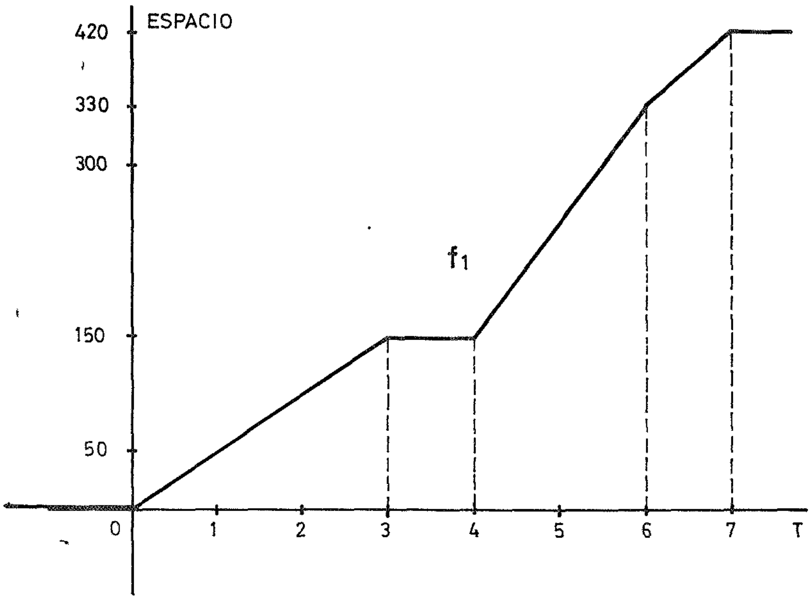
Imaginemos un tren, que sale de Madrid a las 0 horas y marcha con una velocidad constante, de tal forma que en 3 horas ha recorrido 150 Km; desde las 3 h. hasta las 4 h. está detenido por avería; a las 4 h. se pone en marcha de nuevo, recorriendo, en 2 horas, 200 Km. A las 6 h.

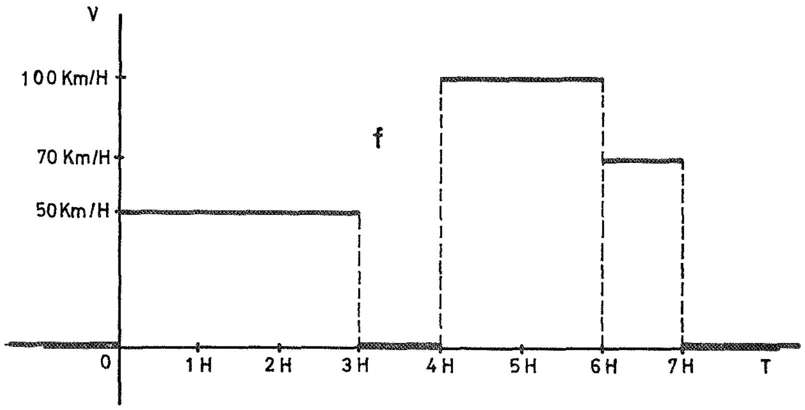
cambia de velocidad, de tal forma que recorre 70 Km en 1 h. En la figura está representada la gráfica del espacio recorrido por el tren a lo largo del tiempo.

Queremos representar la gráfica de la velocidad que ha llevado el tren en ese trayecto (termina a las 7 h.).

En las tres primeras horas llevó una velocidad de 50 Km/h.

De 3 h. a 4 h. : $v = 0.$ Km/h.
De 4 h. a 6 h. : $v = 100$ Km/h.
De 6 h. a 7 h. : $v = 70$ Km/h.





Antes de las 0 h. y después de las 7 h., como el tren está parado,

$$v = 0 \text{ Km/h}.$$

Ya vemos que la gráfica de la velocidad resulta ser la de una función escalonada.

Por otra parte, al ser la velocidad del tren constante en cada intervalo, ha sido muy fácil calcularla; pero si no fuera constante, su cálculo se complica mucho más, pues debemos ir calculándola a cada momento, y lo tenemos que hacer midiendo el espacio recorrido en un instante, o intervalo de tiempo muy pequeño, para poder suponer que la velocidad es prácticamente constante, de esta forma, dividiendo ese espacio recorrido, por el tiempo transcurrido, obtenemos la velocidad en ese momento, es lo que en Física se llama «velocidad instantánea». Más adelante haremos un ejemplo en el que la velocidad no es constante.

A la función de la velocidad, f, la llamaremos, en general, *función derivada de la función* f_1.

(En el ejemplo visto anteriormente hemos calculado en cada punto la derivada por la derecha, aunque esto basta hacerlo en los puntos de ángulo, pues en los demás dá lo mismo. En estos puntos de ángulo sabemos que no hay derivada, pues no coincide la derivada por la derecha con la de la izquierda, pero como todas las funciones escalonadas estudiadas son aplicaciones, parece aconsejable que sí definamos la derivada en esos puntos, aunque quizás sea bueno advertir a los alumnos que en esos puntos la derivada puede tener dos valores, pero que, por ahora, supondremos siempre que toma el valor en el escalón de la derecha de cada punto de ángulo.)

También ocurre que, dada la función f de la velocidad, se puede obtener la función f_1, pero si sabemos con certeza que el tren sale de Madrid, pues ya se comprende que si sólo se conoce la velocidad que tiene el tren en cada momento, esta gráfica de velocidad puede corresponder a un tren que salga, por ejemplo, de Valladolid, o que salga, por ejemplo, a 60 Km de Madrid.

Vamos a obtener, por ejemplo, la gráfica de los espacios que recorre el tren, suponiendo que este tren sale a los 60 Km. de Madrid, dada la misma función f:

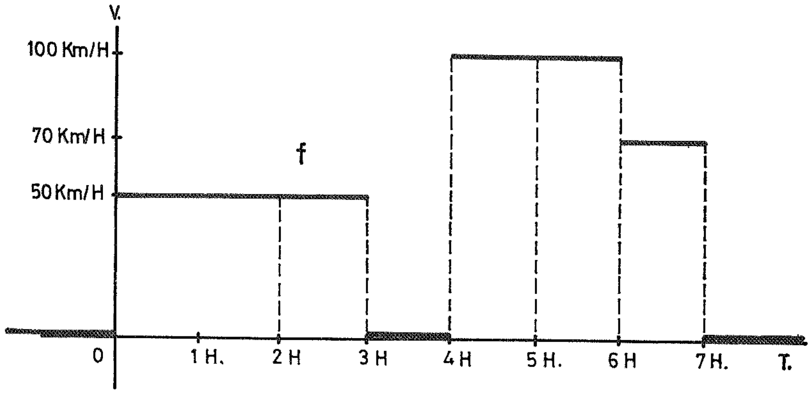
La gráfica «arranca» del punto (0 h., 60 Km.), naturalmente, al ser $v = 0$ antes de las 0 horas, en este período el tren no se mueve, es decir, está siempre a 60 Km de Madrid, por lo que la gráfica, hasta aquí, será una horizontal.

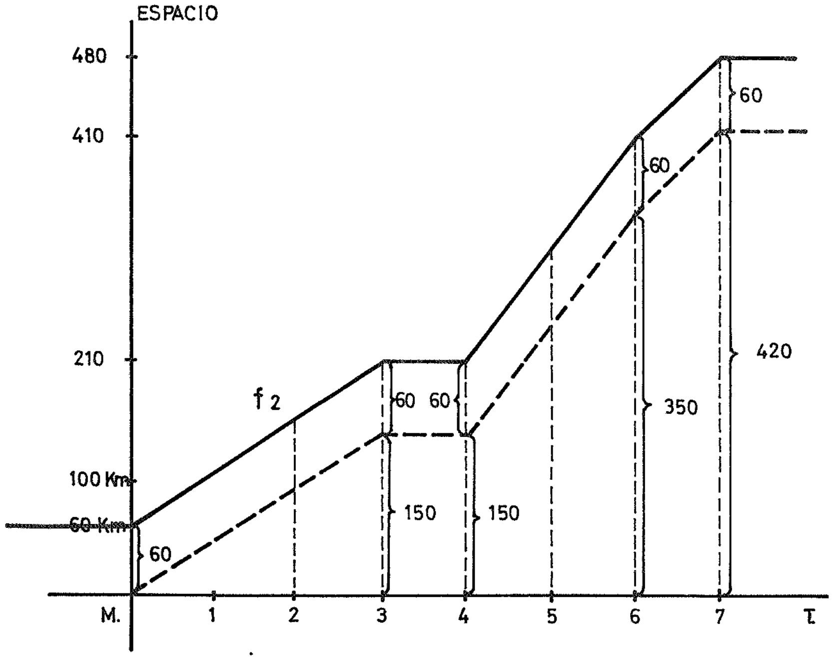
Si de 0 h. a 3 h., la velocidad es constante y vale $v = 50$ Km /h , cada hora recorre 50 Km., luego en tres horas ha recorrido 150 Km , por lo que se encuentra a $60 + 150 = 210$ Km. de Madrid.

Si de 3 h. a 4 h. la velocidad es nula, este trayecto está representado por un segmento horizontal, ya que en todo este tiempo el tren se encuentra siempre a 210 Km. de Madrid.

Si de 4 h. a 6 h., $v = 100$ Km/h, entonces, durante 2 horas recorre 200 Km., por lo que se encuentra a 410 Km. de Madrid.

Si de 6 h. a 7 h. marcha durante 1 hora a una velocidad de 70 Km./h, recorre, pues, 70 Km, por lo que se encuentra a 480 Km de Madrid. A partir de las 7 h el tren está parado, por lo que se mantiene la distancia a Madrid de 480 Km.





Comparemos f_1 y f_2.

Vemos que la ordenada de cualquier punto x en f_2 supera en 60 Km. a la ordenada en f_1, correspondiente a la misma abscisa x.

Si llamamos C_1 a la función que a cualquier abscisa x siempre le corresponde de ordenada 60 Km., es decir:

$$\forall x \in Q \quad , , \quad C_1(x) = 60 \qquad (C_1 : \text{función constante})$$

resulta, entonces, que $f_2 = f_1 + C_1$, definiendo previamente la suma de funciones de este tipo igual que se definió para funciones escalonadas:

$$(f_1 + C_1)(x) = f_1(x) + C_1(x)$$

vemos claramente que $\forall x \quad , , \quad f_2(x) = f_1(x) + 60$, es decir:

$$\forall x \quad , , \quad f_2(x) = f_1(x) + C_1(x)$$

luego tenemos que

$$f_2 = f_1 + C_1$$

Más general aún: igual que se ha hecho con 60 Km. se podría haber hecho con cualquier otra constante, por lo que si llamamos C a cualquier función constante, entonces la función $g = f_1 + C$ tiene la propiedad de que su función derivada es también f; en efecto, cualquier función que se obtenga de f_1, sumándole una función constante, tendrá una gráfica completamente análoga a la de f_1, por lo que los espacios *recorridos* son los mismos que en f_1 y con los mismos tiempos, por tanto nos dará la misma gráfica de velocidad, f; luego f es también la función derivada de g.

A cualquiera de estas funciones, f_1, f_2, g, etc., cuya función derivada es f, se la llama *función integral de la función f*; como una función tiene muchas funciones integrales, se suele hallar una de ellas, por ejemplo, f_1, y decimos: «la función integral de f es $f_1 + C$», donde C es una función constante, es decir, la integral se suele dar en forma general, no de manera particular, como f_1 y f_2.

A cada función integral particular, como f_1 y f_2, se la suele llamar *función primitiva de la función f.*

Resumiendo, podemos decir:

— Una función sólo tiene una función derivada.
— Una función tiene muchas primitivas, pero todas se diferencian en una función constante, por lo que estarán todas determinadas cuando se conozca una de las primitivas.

Regla de Barrow

Vamos a relacionar ahora el área que encierra una función con sus funciones primitivas.

Volvamos otra vez a las gráficas de f y de f_2. Compruebe el alumno que la ordenada en f_2, correspondiente a cualquier abscisa t_0 (tiempo), es igual a 60 más el área encerrada por f, el eje t y las ordenadas de f en $t = o$ y en $t = t_0$ (en las gráficas anteriores está señalado para $t_0 = 2$ h. y para $t_0 = 5$ h.), es decir, que para cualquier t_0 se cumple que $f_2(t_0) - 60 =$ $=$ área encerrada por f, el eje t y las ordenadas de f en 0 y en t_0, o, simbólicamente, representando el área con la letra S, pero alargada, podemos escribir:

$$\int_o^{t_0} f = f_2(t_0) - 60$$

y como $60 = f_2(o)$

$$\int_o^{t_0} f = f_2(t_0) - f_2(o)$$

El alumno puede comprobar, con cálculos muy sencillos, que lo anterior también se cumple para cualquier punto a del eje t, en vez de para el 0.

Por último, si queremos el área que encierra f con el eje t y las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$, será: $(a \leqslant b)$

$$\int_a^b f = f_2(b) - f_2(a)$$

Pero, ¿y si tomamos otra primitiva distinta de la f_2?, ¿el n.º

$$\int_a^b f$$

cambiará? o, mejor dicho, ¿cambiará el número $f_2(b) - f_2(a)$? Vamos a ver que este número no varía si cambiamos de primitiva:

Sea g una primitiva cualquiera de la función f; ya dijimos antes que dos primitivas de una misma función se diferencian en una función constante, es decir, que

$$g = f_2 + C$$

donde C cumple:

$$\forall t : C(t)$$

siempre vale por mismo y por tanto,

$$C(b) = C(a)$$

luego

$$g(b) - g(a) = (f_2 + C)(b) - (f_2 + C)(a) = f_2(b) + \\ + C(b) - f_2(a) - C(a) = f_2(b) - f_2(a)$$

Luego también

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

En definitiva, el área que encierra f entre el eje t, y las ordenadas en a y en b, está *exactamente* determinada en el momento que se conozca una primitiva cualquiera de la función f. Si g representa una primitiva cualquiera de f, el valor de este área es:

$$\boxed{\int_a^b f = g(b) - g(a)}$$

Con esto hemos resuelto en parte el problema de hallar el área que encierra una función cualquiera; decimos «en parte» porque sólo hemos resuelto el problema para funciones sencillas (funciones escalonadas), que ya estaba resuelto antes, con la simpleza de sumar las áreas de varios rectángulos; pero lo interesante de esto está en que esta teoría de las funciones derivadas y de las funciones primitivas nos proporciona un camino para ensayar lo mismo con funciones más complicadas, que no son escalonadas.

A continuación veremos un par de ejemplos más, en los que trataremos de hacer lo mismo que en el ejemplo anterior, pero con funciones más complicadas.

(Continuará)