INTEGRACION

por

M.ª Felisa Garbayo Moreno

I. El espacio vectorial de las funciones escalonadas.

Comenzamos definiendo unas funciones reales de variable real, especiales; son las siguientes:

$$f: \quad R \longrightarrow R$$

$$x \longrightarrow f(x) \begin{cases} = C\ , \ x \in [a,\ b) \\ = O\ , \ x \notin [a\ \ b) \end{cases}$$

siendo

$$[a,\ b) \subset R$$

y c un número real constante.

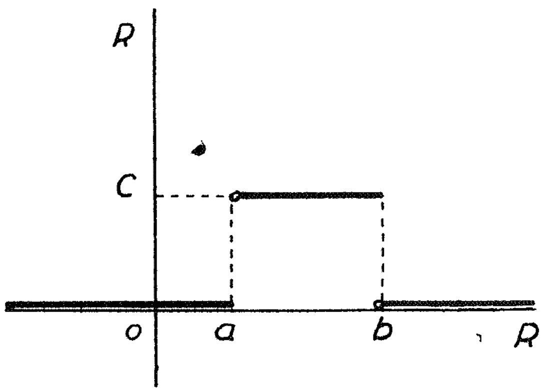

Fig. 1

A esta función la llamaremos $C_{[a,\ b)}$. Impondremos también que el soporte de esta función, sop $f = \overline{\{ x \in R \mid f(x) \neq 0 \}}$, sea un conjunto acotado en la recta real. En el caso de la figura 1, sop $f = [a,\ b]$.

Designaremos por **B** $= \{ C_{[a,\, b)} \}_{[a,\, b) \subset R}$ al conjunto de todas las funciones del tipo arriba indicado, y soporte acotado, cuando $[a, b)$ recorre todos los posibles segmentos de la recta real.

En **B** podemos definir una «adición» así:

$$(C_{[x,\, z)} + C'_{[x',\, y')})(y) = C_{[x,\, z)}(y) + C'_{[x',\, y')}(y) \ , \ \forall\, y \in R$$

Evidentemente esta función $C_{[x,\, z)} + C'_{[x',\, y')}$ no pertenece al conjunto **B** (ver Fig. 2).

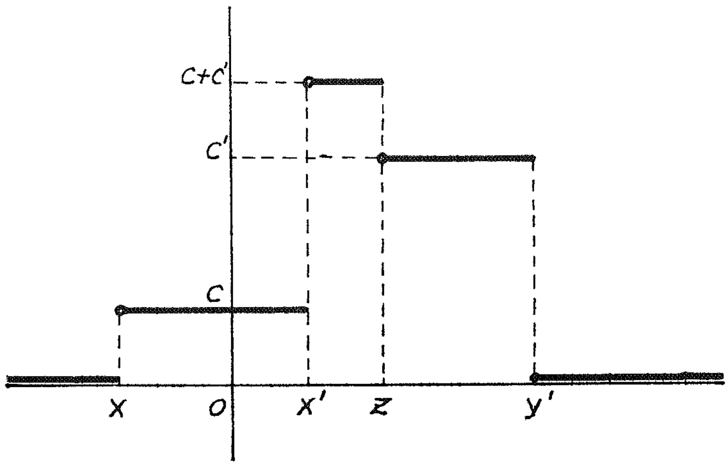

Fig. 2

Ejercicios que se pueden proponer al alumno.—Definir las funciones $2_{[-1,\, 0)} + 3_{[2,\, 3)}$, $1_{[0,\, 3)} + 4_{[2,\, 4)}$ y dibujarlas (Fig. 3).

$$(2_{[-1,\, 0)} + 3_{[2,\, 3)})(x) = \begin{cases} = 0 \ , & x < -1 \\ = 2 \ , & -1 \leqslant x < 0 \\ = 0 \ , & 0 \leqslant x < 2 \\ = 3 \ , & 2 \leqslant x < 3 \\ = 0 \ , & 3 \leqslant x \end{cases}$$

$$(1_{[0,\, 3)} + 4_{[2,\, 4)})(x) = \begin{cases} = 0 \ , & x < 0 \\ = 1 \ , & 0 \leqslant x < 2 \\ = 5 \ , & 2 \leqslant x < 3 \\ = 4 \ , & 3 \leqslant x < 4 \\ = 0 \ , & 4 \leqslant x \end{cases}$$

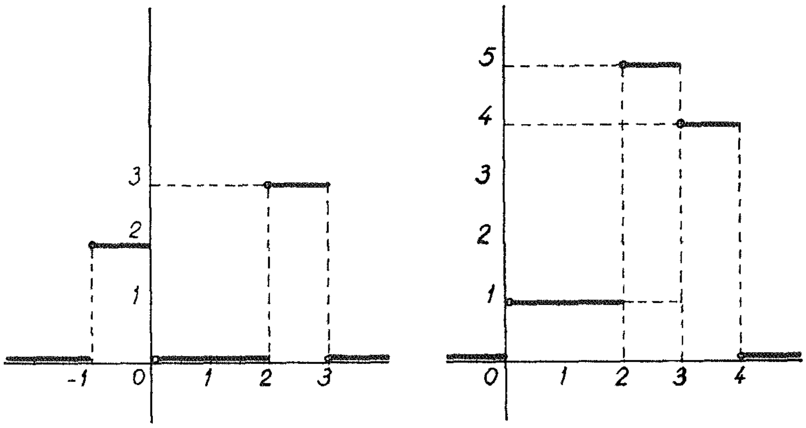

Fig. 3

Llamaremos ξ al conjunto de todas las funciones que se pueden obtener sumando un número finito de funciones de **B**.

$$\xi = \left\{ f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \mid f = \sum_{i \in \mathrm{F}} f_i \, , \, f_i \in \mathbf{B} \, , \, \mathrm{F} = \text{finito} \right\}$$

evidentemente sop f es acotado, $\forall \, f \in \xi$.

En este conjunto ξ se definen dos operaciones, una interna y otra externa, así:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \, , \, \forall \, x \in \mathrm{R}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) \, , \, \forall \, x \in \mathrm{R}$$

siendo

$$\lambda \in \mathrm{R}$$

y se comprueba fácilmente que se verifican los ocho axiomas de un espacio vectorial. Hemos construido, pues $(\xi_1 + \, , \, \cdot)$, espacio vectorial sobre R, que llamaremos *espacio vectorial de las funciones escalonadas.*

Ejercicio.—Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 \, , & x \in [-\infty, -2) \\ 1 \, , & x \in [-2, -1) \\ 3 \, , & x \in [-1, 2) \\ 0 \, , & x \in [2 \, , 3) \\ 2 \, , & x \in [3 \, , 4) \\ 0 \, , & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

hallar la función $3 \cdot f$ (Fig. 4).

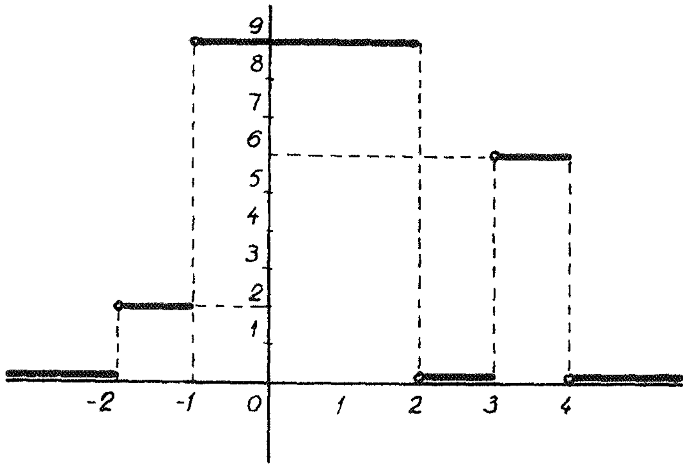

Fig. 4

Observar que:

$$\left\{\begin{array}{l} f \in \xi \\ \text{sop } f \subset [a, b] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, p \in \mathbf{P}([a,b]),\ p \text{ una partición de } [a, b] \\ p = \{\, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \,\} \text{ tal que} \\ f(x) = C_i\ ,\ \forall\, x \in [x_{i-1}\, ,\, x_i]\ ,\ i = 1, \ldots , n \end{array}\right.$$

Es decir, f es una función escalonada si y sólo si f es constante en cada $[x_{i-1}\, , x_i)$, siendo $\{\, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \,\}$ una partición de $[a, b]$, donde $[a, b]$ es un segmento cerrado que contiene a sop f.

II. Definición de un elemento del dual ξ^*.

Consideremos el espacio dual de ξ, que designaremos por ξ^*, y que como ya sabemos viene definido por $\xi^* = \text{Hom}\,(\xi, \mathrm{R})$.

Vamos a definir una aplicación

$$A : \xi \longrightarrow \mathrm{R}$$

$$f \longrightarrow A(f) = \sum_{i=1}^{n} (f\xi_i)\,(a_i - a_{i-1}) \quad ,, \quad a_{i-1} < \xi_i < a_i$$

siendo los a_i los puntos de discontinuidad de la función escalonada f.

Ejemplo.—Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-\infty \, , -2) \\ 2 & , \quad x \in [-2 \, , 0) \\ 0 & , \quad x \in [0 \, , 1) \\ 1 & , \quad x \in [1 \, , 3) \\ 3 & , \quad x \in [3 \, , 4) \\ 0 & , \quad x \in [4 \, , +\infty) \end{cases}$$

Hallar $A(f)$.

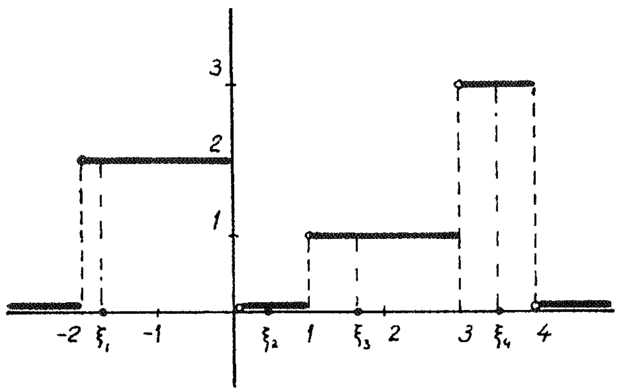

Fig. 7

$$A(f) = f(\xi_1)\,(0 = (-2)) + f(\xi_2)\,(1 - 0) + f(\xi_3)\,(3 - 1) + f(\xi_4)\,(4 - 3) =$$
$$= 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 2 + 3 = 9$$

Es un simple ejercicio de cálculo comprobar que A es un homomorfismo, es decir:

$$A(f + g) = A(f) + A(g) \quad , \quad \forall \, f, g \in \xi$$
$$A(\lambda \, f) = \lambda \, A(f) \quad , \quad \forall \, f \in \xi \, , \forall \, \lambda \in R$$

Hemos construido, pues, un elemento $A \in \xi^*$. Este homomorfismo no es en general un monomorfismo (Fig. 8).

$$A(f) = 2 \cdot 3 = 6 \qquad A(g) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$$
$$A(f) = A(g)$$

y sin embargo

$$f \neq g$$

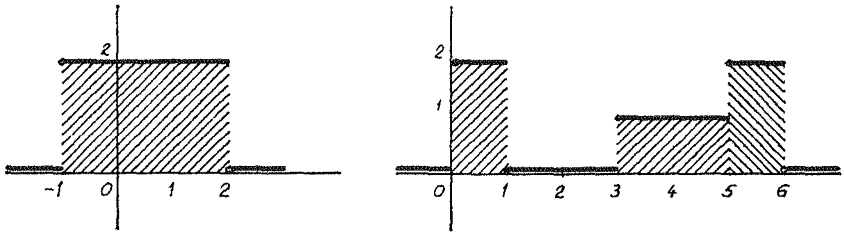

Fig. 8

III. Aplicación norma sobre ξ.

Definimos la aplicación

$$\xi \xrightarrow{\| \ \|} R_+$$

$$f \longrightarrow \| f \| = \sup_{x \in R} | f(x) |$$

este supremos existe, por la construcción de las funciones escalonadas f.

Esta aplicación $\| \ \|$ la llamamos *norma* y verifica las propiedades

1) $\| f \| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.
2) $\| \lambda f \| = | \lambda | \cdot \| f \|$.
3) $\| f + g \| \leqslant \| f \| + \| g \|$.

Como se comprueba sencillamente.

Tenemos, pues $(\xi, \| \ \|)$, que es un E.V.N. (espacio vectorial normado) sobre R.

Podemos definir entonces los siguientes conceptos.

Definición.—Diremos que la sucesión $(f_n)_{n \in N} \subset \xi$ de funciones escalonadas es de Cauchy cuando verifique la condición

$$\forall \varepsilon > 0 \quad , \quad \exists N_\varepsilon \in N \mid \forall n, n' \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow \| f_n - f_{n'} \| \leqslant \varepsilon$$

Definición.—Se dice que la función $f \in \xi$ es límite de las $(f_n)_{n \in N}$ y se notará

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \mid \forall n \geqslant N_\varepsilon \Longrightarrow \| f - f_n \| \leqslant \varepsilon$$

Cabe hacernos la pregunta, si $f = \lim f_n$, ¿se verificará que $A(f) = \lim A(f_n)$?

Pues, en general, no se verifica esto.

Contraejemplo.

Construimos la sucesión de funciones escalonadas

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{n} & , \quad 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & , \quad n \leqslant x \end{cases} \qquad n \geqslant 1$$

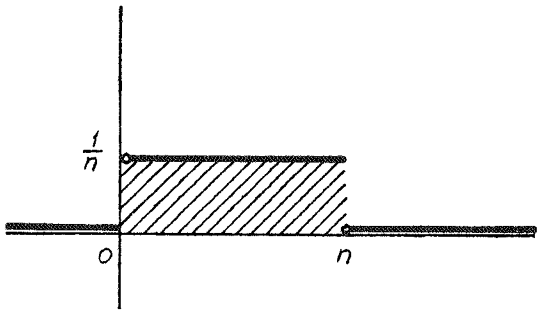

Fig. 9

Se comprueba inmediatamente que esta sucesión de funciones escalonadas converge hacia la función cero

$$\lim_{n \to \infty} f_n = 0$$

y sin embargo

$$\lim_{n \to \infty} A(f_u) \neq A(o)$$

pues

$$A(f_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \,, \forall\, n \in N \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} A(f_n) = 1$$

y por ser A un homomorfismo

$$A(0) = 0$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} A(f_n) = 1 \neq 0 = A(0)$$

Ahora bien, si consideramos el subespacio vectorial

$$\xi_{[a,\, b]} \subset \xi$$

siendo

$$\xi_{[a,\,b]} = \{ f \in \xi \mid \text{sop} \subset [a\,,\,b[\ \}$$

sí se verifica:

Proposición.—Si

$$\left. \begin{array}{l} f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n\,,\ f \in \xi_{[a,\,b]} \\ \\ f_n \in \xi_{[a,\,b]}\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathrm{A}(f_n) = \mathrm{A}\,(f)$$

Demostración:

$$\forall\ \epsilon > 0\ ,\ \exists\ \mathrm{N}_\varepsilon \mid \forall\ n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon \Rightarrow \mid \mathrm{A}(f) - \mathrm{A}(f_n) \mid \leqslant \epsilon$$

esto hemos de probar.

Siempre se puede considerar que f y f_n tienen las mismas divisiones, basta considerar una partición más fina del intervalo $[a,\ b]$. Entonces:

$$\mid \mathrm{A}(f) - \mathrm{A}(f_n) \mid = \mid \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,(a_i - a_{i-1}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} f_n(\xi_i)\,(a_i - a_{i-1}) \mid = \mid \sum_{i=1}^{m} (f(\xi_i) - f_n(\xi_i)\ )\ (a_i - a_{i-1}) \mid \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \mid f(\xi_i) - f_n(\xi_i) \mid (a_i - a_{i-1}) \leqslant \max_{x \in [a,b]} \mid f(x) -$$

$$- f_n(x) \mid \cdot \sum_{i=1}^{m} (a_i - a_{i-1}) = \| f - f_n \| \cdot (b - a)$$

y como

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

dado

$$\varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \mathrm{N}_\varepsilon \mid \forall\ n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon \Rightarrow \| f - f_n \| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}$$

de donde nos queda que:

$$\forall\ n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon\ ,\ \mid \mathrm{A}(f) - \mathrm{A}(f_n) \mid \leqslant \frac{\epsilon}{b - a}\,(b - a) = \varepsilon$$

c.q.d.

Definición.—Un E.V.N. se dice *completo* cuando toda sucesión de Cauchy tiene límite dentro del espacio.

Vamos a ver que:

Proposición: ξ no es completo.

Vamos a construir una sucesión de funciones escalonadas, que sea de Cauchy y sin embargo tiene por límite una función que no es escalonada (figura 10).

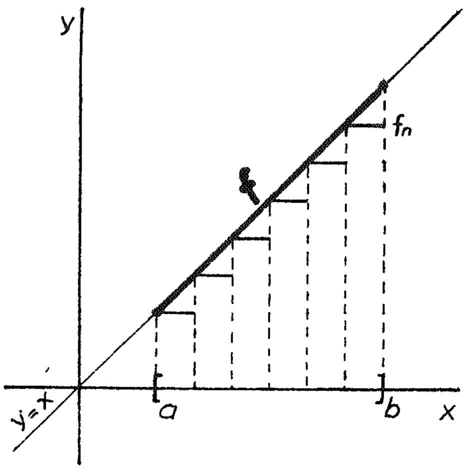

Fig. 10

Considero la función

$$f : [a,b] \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow f(x) = x$$
$$f(x) = 0 \quad , \quad A\ x \notin [a,b)$$

Divido $[a,b]$ en n partes iguales, construyo la función f_n escalonada así:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ a & , a \leqslant x < a + \dfrac{b-a}{n} \\ a + \dfrac{b-a}{n} & , a + \dfrac{b-a}{n} \leqslant x < a + 2 \cdot \dfrac{b-a}{n} \\ \cdots\cdots & , \\ a + (n-1)\dfrac{b-a}{n} & , a + (n-1)\dfrac{b-a}{n} \leqslant x < b \\ 0 & , b \leqslant x \end{cases}$$

Se comprueba inmediatamente que esta sucesión $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ es de Cauchy y sin embargo

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f,$$

siendo f la función $f(x) = x$, que no es una función escalonada.

Vamos a completar este espacio.

IV. ESPACIO VECTORIAL DE LAS FUNCIONES SEGMENTARIAMENTE CONTINUAS. E. V. DE LAS FUNCIONES SEGMENTARIAS CONTINUAS POR LA DERECHA.

Definición.—Diremos que $f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ es una función segmentariamente continua cuando en cada segmento de R tiene a lo más un número finito de discontinuidades y estas discontinuidades sean de primera especie, es decir, existe en cada punto de discontinuidad el límite por la derecha y límite por la izquierda.

Se comprueba fácilmente que con las operaciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in \mathrm{R}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \qquad \forall x \in \mathrm{R}, \text{ siendo } \lambda \in \mathrm{R}$$

el conjunto de las funciones s. c. (segmentariamente continuas) tiene estructura de E. V.

Definición.—Diremos que una función s.c. f es s.c. por la derecha, cuando el límite por la derecha en cada punto de discontinuidad, coincide con el valor de la función en dicho punto.

Vamos a imponer además a estas funciones que su soporte sea acotado. Llamaremos $[= \{ f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R} \mid f$ s.c. por la derecha y sop. f. acotado $\}$.

Gráficamente las funciones de $[$ serán de la forma (Fig. 11)

En $[$ E.V. sobre R consideramos la norma

$$[\xrightarrow{\;\|\ \|\;} \mathrm{R}_+$$

$$f \longrightarrow \| f \| = \sup_{x \in \mathrm{R}} | f(x) |$$

y tenemos $([, \| \ \|)$ un E.V.N. ξ es un subespacio vectorial del anterior.

Teorema.—ξ es denso en $[$.

Demostración:

Decir que ξ es denso en $[$

$$[\iff \overline{\xi} = [\iff \forall f \in [, \exists (f_n)_{n \in \mathrm{N}} \subset \xi$$

tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f$$

Sea entonces f una función segmentariamente continua por la derecha, tal que sop $f \subset [a,b]$. Por definición de f, a lo más existen un número finito de puntos de discontinuidad de la función f en $[a,b]$, sean $\{ c_1 , c_2 , \ldots\ldots , c_n \}$, además estos c_i son puntos de discontinuidad de primera especia, es decir,

$$\exists \lim_{\substack{x \to c_i \\ x > c_i}} f(x) = f(c_i +) \qquad \text{y} \qquad \exists \lim_{\substack{x \to c_i \\ x < c_i}} f(x) = f(c_i -)$$

y por ser f s.c. por la derecha $f(c_i +) = f(c_i)$.

Gráficamente, f, será del tipo de la figura 11.

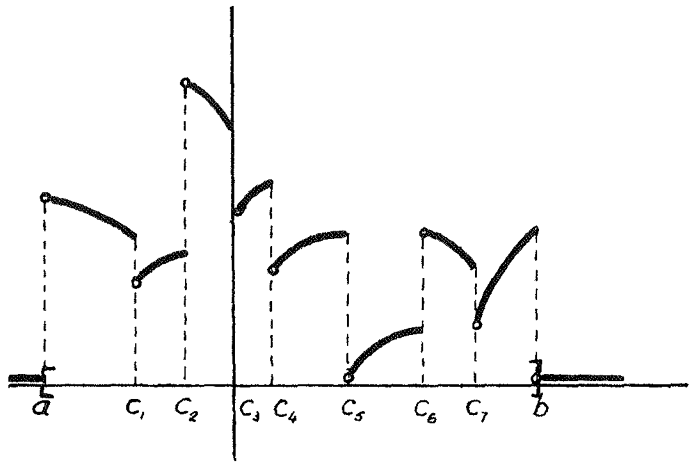

Fig. 11

Con todas estas hipótesis, podemos afirmar que:
dado

$$\boxed{n \in \mathrm{N}} , \forall\, x \in [a,b] , \exists$$

un entorno de

$$x , V^{x} = [\varphi(x) , \psi(x)]$$

tal que

$$x \in [\varphi(x) , \psi(x)]$$

verificándose que

$$\forall\ s\ ,\ t \in [\varphi(x)\ ,\ x)\ \cap\ [a,b] \quad \Longrightarrow \quad |\ f(s) - f(t)\ |\ \leqslant \frac{1}{n}$$

o bien

$$\forall\ s\ ,\ t \in [x\ ,\ \psi(x))\ \cap\ [a,b] \quad \Longrightarrow \quad |\ f(s) - f(t)\ |\ \leqslant \frac{1}{n}$$

Hemos obtenido, pues, un recubrimiento abierto

$$\{\ ]\ \varphi(x)\ ,\ \psi(x)\ [\ \}_{x \in [a,\, b]}$$

de $[a, b]$ y por ser $[a, b]$ compacto en la recta real, $\exists$ un subrecubrimiento finito,

$$\{\ ]\ \varphi(x_i)\ ,\ \psi(x_i)\ [\ \}_{i=1,\ \ldots\ ,\ n}$$

de $[a,b]$. Pasamos otra vez a los

$$\{\ V(x_i)\ =\ [\ \varphi x_i)\ ,\ \psi\ (x_i)]\}$$

que también recubren a $[a\ ,\ b]$.

Consideramos la siguiente partición p en $[a,b]$, $p\ =\ \{\ a\ =\ a_0\ <\ <\ a_1\ <\ \ldots\ <\ a_r\ =\ b\ \}$ formada por los puntos a, b, x_i , $\varphi(x_i)$, $\psi(x_i)$, $i\ =\ 1,\ \ldots\ ,\ m$. Se verifica para esta p, que

$$\forall\ s\ ,\ t \in [a_i\ ,\ a_{i+1})\ ,\ |\ f(s) - f(t)\ |\ \leqslant \frac{1}{n}\ .$$

Definimos entonces la función escalonada f_n correspondiente al $n \in N$ inicialmente dado, de las siguiente forma:

$$\begin{cases} f_n(x)\ =\ f(a_i)\ ,\ \forall\ x \in [a_i, a_{i+1})\ ,\ i\ =\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ r \\ f_n(b)\ =\ 0 \\ f_n(x)\ =\ 0\ ,\ x \notin [a,b] \end{cases}$$

sop $f_n\ \subset [a,b]$

Está claro que

$$\|\ f - f_n\ \|\ =\ \sup_{x \in R}\ |\ f(x) - f_n(x)\ |\ \leqslant \frac{1}{n}$$

Hemos construido, pues, una sucesión de funciones escalonadas $(f_n)_{n \in N}$, tal que:

$$\forall\ \epsilon > 0\ ,\ \exists\ N_\varepsilon \in N\ ,,\ \forall\ n\ \geqslant\ N_\varepsilon \Longrightarrow\ \|\ f - f_n\ \|\ \leqslant \frac{1}{n}\ \leqslant \varepsilon$$

lo cual quiere decir que

$$\lim_{n \to \infty}\ f_n\ =\ f$$

c.q.d.

V. DEFINICION DE UN ELEMENTO DEL DUAL $[^*$.

Ya demostrado que

$$\forall\ \varphi \in [\ ,\ \exists\ (f_n)_{n \in N} \subset \xi$$

tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \varphi$$

podemos definir la correspondencia

$$[\ \xrightarrow{\ \mathrm{A}\ } \mathbf{R}$$

$$\varphi \longrightarrow \mathrm{A}(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{A}(f_n)$$

siendo $(f_n)_{n \in N}$ una sucesión que tiene por límite φ y $\mathrm{A}(f_n)$ está definido por ser f_n una función escalonada, como ya hemos visto en II.

Ahora bien, ¿será A una aplicación?, o de otro modo, si $(f_n) \to \varphi$ y $(g_n) \to \varphi$, ¿se verificará

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{A}(f_n) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{A}(g_n)?$$

Proposición.—A es una aplicación.

Demostración: Hemos de ver que $\lim \mathrm{A}(f_n) = \lim \mathrm{A}(g_n)$, siendo $\lim f_n = \varphi = \lim g_n$.

Desde luego, si sop φ C $[a,b]$, sop $f_n \subset [a,b]$ y sop $g_n \subset [a,b]\ \forall\ n \in \mathrm{N}$

Entonces:

$$| \mathrm{A}(f_n) - \mathrm{A}(g_n) | =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} f_n(\xi_i)\,(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{m} g_n(\xi_i)\,(a_i - a_{i-1}) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{m} (f_n(\xi_i) - g_n(\xi_i)\,)\,(a_i - a_{i-1}) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} | f_n(\xi_i) -$$

$$- g_n(\xi_i)\ | \,(a_i - a_{i-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x \in \mathrm{R}} | f_n(x) - g_n(x) | \,(b - a) \leqslant || f_n - g_n || \,(b - a).$$

Pero por ser

$$\lim f_n = \lim g_n$$

se verifica que dado

$$\varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \mathrm{N}_\varepsilon\ |\ \forall\ n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon\ || f_n - g_n || \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}$$

de donde obtenemos que

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |\, A(f_n) - A(g_n)\,| \leqslant (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon$$

Lo cual dice que

$$\lim A(f_n) = \lim A(g_n) \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición.—A es homomorfismo

1. $A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi) \quad , \quad \varphi, \psi \in [$
2. $A(\lambda\, \varphi) = \lambda\, A(\varphi) \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}, \varphi \in [$

Demostración:

1. $$A(\varphi) + A(\psi) = \lim A(f_n) + \lim A(g_n)$$

siendo

$$(f_n) \longrightarrow \varphi\, , \ (g_n) \longrightarrow \psi$$

$$A(\varphi) + A(\psi) = \lim\, [A(f_n) + A(g_n)] = \lim A(f_n + g_n)$$

pero

$$(f_n + g_n) \longrightarrow \varphi + \psi$$

por propiedades de límites, luego

luego

$$A(\varphi) + A(\psi) = \lim A(f_n + g_n) = A(\varphi + \psi).$$

2. De modo análogo.