INTRODUCCION DE LA INTEGRAL DEFINIDA

por

MANUEL RUIZ DOMINGUEZ

PROGRAMA

1. *Espacio vectorial de las funciones escalonadas.*

2. *Area encerrada por una función escalonada.*

   — Necesidad (con un ejemplo).
   — Ejemplos y ejercicios formales.
   — Formalización como aplicación lineal.

3. *Aproximación de una función cualquiera con funciones escalonadas.*

   — Necesidad (con un ejemplo).
   — Dada una función (seg. cont.) cualquiera, construir una sucesión de funciones escalonadas que tienda hacia ella.

4. *Aproximación de la integral definida.*

   — Necesidad (con un ejemplo).
   — Idea de formalización.

5. *Introducción de la función derivada y de la función integral.*

   — Necesidad (con un ejemplo).
   — Idea de formalización.
   — Integral definida. Regla de Barrow.
   — Ligazón con la teoría clásica.

(Con este trabajo me propongo, mas que nada, obligar a que se maneje un E. V., donde los elementos son funciones. dar una idea sobre límite de una sucesión de funciones, cálculo aproximado de la integral definida de una función cualquiera y una introducción al cálculo integral.

Todo lo que escriba, excepto las explicaciones dirigidas al profesor, pretendo que lo pueda entender un chico de Bachillerato.

A nivel de 3.º de Bachillerato creo que se puede dar todo el punto 1, parte del 2 y una ligera idea del 4.

A nivel de 5.º, además de lo anterior, creo que se puede dar el resto, quizás restringiéndose en la parte de sucesiones de funciones y en algunos ejemplos de Física de 6.º

Ejemplos de funciones que sean puramente escalonadas no hay muchos; sin embargo, creo que no se necesita ningún esfuerzo de imaginación por parte del chico para que también lo sean otras que son más o menos variables. De hecho creo que no puede existir, en la vida real, una sucesión de funciones escalonadas cuyo límite sea una función segmentariamente continua.

Después de acabar el trabajo, opino que si hay explicaciones que puedan parecer demasiado triviales a un chico de 6.º, quizás no lo sean tanto para un nivel del nuevo C. O. U. (en él habrá chicos que no han estudiado matemáticas desde hace tres años).

FUNCIONES ESCALONADAS

Existen funciones particularmente importantes en Matemáticas, por constituir la base esencial del estudio de las funciones y que resuelven de una manera fácil diversos problemas que se plantean en la vida corriente. Estas funciones se designan con el nombre de FUNCIONES ESCALONADAS.

Primero veremos varios ejemplos, en los que situaciones reales de la vida pueden ser representadas con funciones escalonadas, más tarde justificaremos que una función escalonada es una aplicación de Q en Q (o entre los números reales, según el caso), después operaremos con ellas, y, por supuesto, siempre las representaremos gráficamente.

EJEMPLO 1.º

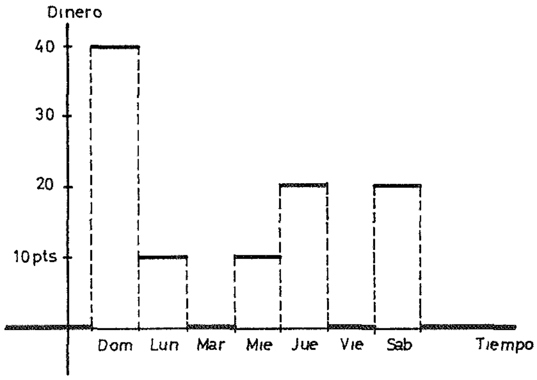
Distribuir 100 pesetas semanales entre los días de la semana.

Supongamos que la distribución es la siguiente:

Si esas 100 pesetas las recibe el domingo, antes de este día no puede gastar nada de ellas. Así, pues:

Antes del domingo	⟶	0 ptas.
Domingo	⟶	40 ptas.
Lunes	⟶	10 ptas.
Martes	⟶	0 ptas.
Miércoles	⟶	10 ptas.
Jueves	⟶	20 ptas.

Viernes	⟶	0 ptas.
Sábado	⟶	20 ptas.
Después del sábado	⟶	0 ptas.



A la derecha del cuadro está representada la función escalonada correspondiente. Ya se comprende por qué se les dá el nombre de escalonadas.

Antes de fijarnos en los detalles que tienen, y estudiarlos con cuidado, vamos a ver varios ejemplos más.

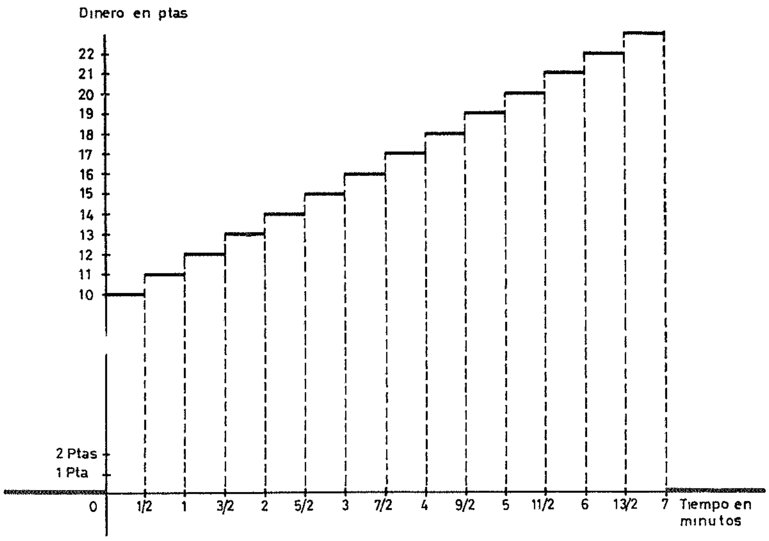
EJEMPLO 2.º

Coste del alquiler de un taxi por el tiempo que se tenga ocupado.

Antes del alquiler del taxi, no cuesta nada; la bajada de bandera son 10 pesetas, y después, poco más o menos, sube una peseta cada 30 segundos.

Tiempo	⟶	Precio
Antes de 0 seg	⟶	0 ptas.
De 0 seg a 30 seg	⟶	10 ptas.
De 30 seg a 1 min	⟶	11 ptas.
De 60 seg a 1 min 30 seg	⟶	12 ptas.
De 1 min 30 seg a 2 min	⟶	13 ptas.
Etcétera.		

La gráfica, por sí sola, nos dice todo lo ocurrido: Lo que el alquiler costaba a los 3 min, a los 4 min 15 seg, etc.; naturalmente, este ejemplo no es del todo real, pero ya se sabe que el taxímetro hace saltar el precio según la mayor o menor velocidad que lleve el taxi; si lo hubiéramos hecho tomando en cuenta esto último, nos quedaría una gráfica parecida, pero algunos «escalones» serían más anchos y otros más estrechos; no por esto deja de ser una función escalonada. Una función escalonada se caracteriza porque su gráfica está formada por segmentos horizontales



(no tienen por qué tener la misma medida, ni estar todos por encima del eje coordenado horizontal); además, ha de ser una aplicación, es decir, que todo elemento del conjunto inicial ha de tener imagen, esto, en la gráfica, quiere decir que toda perpendicular al eje horizontal corta a la gráfica, y esta imagen ha de ser única; es decir, que corte en *un solo* punto; esto último nos obliga a preguntar: ¿cuántas imágenes tienen los puntos representados por los números 0, $^1/_2$, 1, $^3/_2$, etc.?, ya se comprende que, en el caso del taxi, el taxista sólo nos cobra *un* precio por el viaje, es decir, si para el taxímetro a los 6 minutos, por ejemplo, nos cobrará 21 ó 22 pesetas, pero no los dos precios a la vez; el que sean, 21 ó 22 pesetas, sólo depende de lo más o menos perfecto que sea el taxímetro; no sin gran esfuerzo, podemos suponer que en el momento exacto de cumplirse esos tiempos el precio es el correspondiente al escalón de la derecha, es decir, las imágenes de los puntos claves, como 2, $^7/_2$, 6, etc., son las que definen los escalones de la derecha de esos puntos, por esto, en la gráfica, los puntos que señalan la imagen de estos puntos claves está señalado con un punto un poco más grueso.

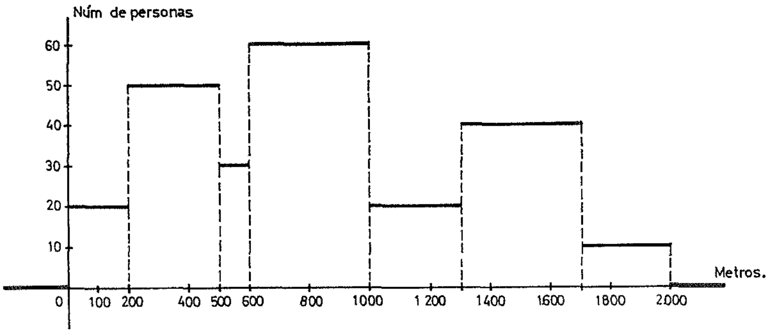
No es necesario que estos puntos estén a la izquierda de cada escalón, también pueden estar a la derecha, pero supondremos siempre que estarán a la izquierda.

Otra característica más a tener en cuenta es la de que sólo en un número finito de intervalos del eje horizontal, la función es distinta de cero, es decir, que siempre podremos encontrar dos puntos, A y B, del eje horizontal, para los cuales se verifica que la imagen de todo punto anterior al A (suponemos que A está a la izquierda de B) es cero, y que la imagen de todo punto que esté a la derecha de B es también cero; en el ejemplo anterior, el punto A es el origen de coordenadas y el punto B es el que corresponde al tiempo $^{13}/_2$.

EJEMPLO 3.º

Se desea representar el número de personas (viajeros) que lleva un autobús de transporte urbano, en cualquier punto del trayecto, en un solo recorrido de la línea que efectúa, fuera de este recorrido suponemos que no lleva viajeros, también suponemos que el recorrido tiene una longitud de 2 kilómetros.

Metros		número de personas
De 0 a 200	⟶	20
De 200 a 500	⟶	50
De 500 a 600	⟶	30
De 600 a 1.000	⟶	60
De 1.000 a 1.300	⟶	20
De 1.300 a 1.700	⟶	40
De 1.700 a 2.000	⟶	10



¿Cuántas personas (viajeros) lleva el autobús a los 700 m del trayecto? ¿Y a los 1.572 m? ¿Cuál es la imagen de 933 m? ¿Cuál es la imagen de 128 m? Si llamamos f a la aplicación metros $\xrightarrow{f}$ número de personas. ¿Cuánto valen $f(55)$, $f(1.250)$, $f(600)$, $f(1.300)$?

Ejercicio 1.º

Representar gráficamente la función escalonada:

Meses del curso anterior ⟶ Nota en Matemáticas

de tal forma, que un mes queda representado por un segmento en el eje horizontal, de forma análoga a como se hizo en el ejemplo 1.º con los días de la semana.

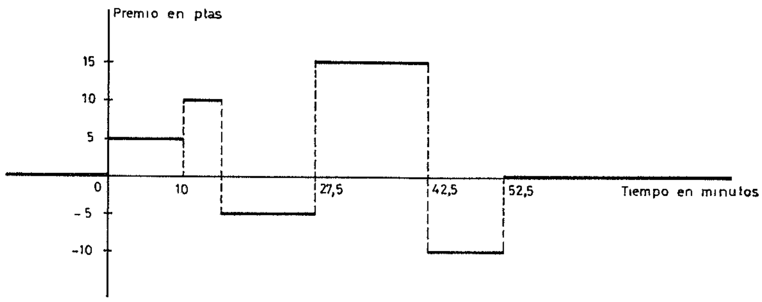
(Si no recuerdas las notas, las inventas.)

EJEMPLO 4.º

Dos chicos inician un campeonato para hacer 5 problemas, de tal forma que apuestan una cierta cantidad como premio para el que haga antes, y bien, el problema de que se trate; el premio, o la apuesta, es más o menos grande, según la dificultad del problema. Se quiere representar la situación (lo que gana o pierde por problema) de uno de los chicos a lo largo del tiempo, es decir, se desea representar la función:

Tiempo ———→ Ganancia o pérdida por problema

Supongamos que la situación del primer chico se ajusta a la gráfica:



¿Qué explicación se puede dar para que antes de 0 min y después de 52 min 30 seg (52,5 min) la gráfica coincida con el eje horizontal?

Haz el diagrama de flechas.

Demuestra que es aplicación.

¿Cuál es la imagen de 12 min?, ¿y de 46 min 18 seg?, ¿y de 42 min 30 seg?

Si llamas f a la aplicación anterior, comprueba que el cuadro que sigue quiere decir lo mismo que el diagrama de flechas que has escrito (t representa a las abscisas o números del eje horizontal).

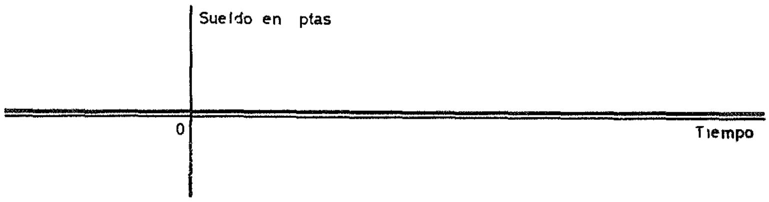
$f(t) = 0$ pts. si $t < 0$	$f(t) = -5$ pts. si $15 \leqslant t < 27$ m 30 s	$f(t) = 0$ pts. si $52{,}5 \leqslant t$.
$f(t) = 5$ pts. si $0 \leqslant t < 10$	$f(t) = 15$ pts. si $27{,}5 \leqslant t < 42{,}5$ m	
$f(t) = 10$ pts. si $10 \leqslant t < 15$	$f(t) = -10$ pts. si $42{,}5 \leqslant t < 52{,}5$	

Si lo que gana el primer chico es lo que pierde el 2.º, y si lo que pierde el 1.º es lo que gana el 2.º, dibuja la gráfica correspondiente al 2.º chico.

EJEMPLO 5.º

Sueldo que obtiene una silla cualquiera a lo largo del tiempo.

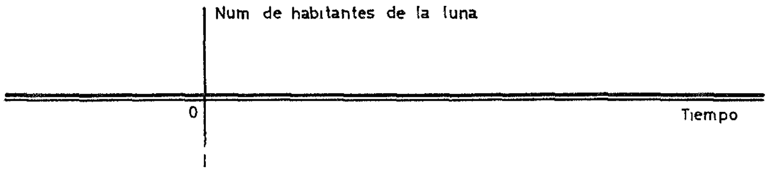
Como se puede comprender, una silla no recibe ningun salario, en todo caso, lo recibiría el dueño de la silla. Por esta razón, si se representa en el eje horizontal el tiempo, y en el eje vertical el sueldo, la gráfica de la función es una recta que coincide con el eje horizontal, ya que la imagen de cualquier número del eje horizontal es cero:



EJEMPLO 6.º

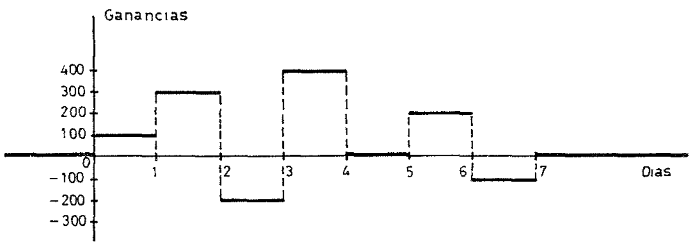
Número de habitantes de la Luna a lo largo del tiempo.

A esta función le ocurre lo mismo que a la del ejemplo anterior, está demostrado que la Luna nunca ha tenido habitantes, naturalmente «habitante» es la persona que vive en un lugar, en nuestro caso, la Luna.



EJEMPLO 7.º

Ganancias o pérdidas de un vendedor por días de una semana



Día 1	⟶	100 ptas.
» 2	⟶	300 ptas.
» 3	⟶	—200 ptas.
» 4	⟶	400 ptas.
» 5	⟶	0 ptas.
» 6	⟶	200 ptas.
» 7	⟶	—100 ptas.

Comprueba que la correspondencia anterior es aplicación.

Llamando f a la función escalonada de este ejemplo, completa el cuadro:

$f(x) = 0$ si $x < 0$ (x representa las abscisas)
$f(x) = 100$ si $0 \leqslant x < 1$
....

EJEMPLO 8.º

Representa gráficamente la función definida por:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ si } x < -2 \\ f(x) &= 3 \text{ si } -2 \leqslant x < 1 \\ f(x) &= -2 \text{ si } 1 \leqslant x < 3 \\ f(x) &= 4 \text{ si } 3 \leqslant x < 6 \\ f(x) &= -3 \text{ si } 6 \leqslant x < 9 \\ f(x) &= 0 \text{ si } 9 \leqslant x \end{aligned}$$

Como puede verse en los ejemplos estudiados, hay una gran diversidad de situaciones de la vida en que se presentan estas funciones escalonadas, es por lo que se estudian con especial interés.

Todos habréis visto, en más de una ocasión, en los diarios informativos, que hay representaciones parecidas a las que hemos estudiado aquí; las hay de producción de acero por años, trigo, etc.; en empresas de todo tipo, etc.

(Ejemplos a los que se puede ajustar una función escalonada no faltan. Todos los vistos hasta ahora tienen por misión que el chico se acostumbre a manejar estas funciones; ya se comprende que debemos hacer lo necesario para que el chico los sepa manejar.

Los ejemplos formales, como el ejemplo 8, conviene que se hagan a partir de los 15 años, e incluso se puede intentar hacerlo a nivel de 3.º de Bachillerato, puede ser que resulte bien.

A continuación hablaremos de la suma de funciones escalonadas. Empezaremos con un ejemplo.)

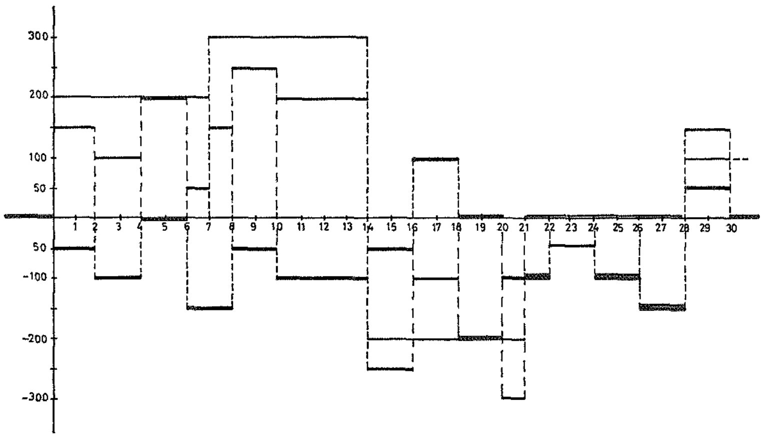
SUMA DE FUNCIONES ESCALONADAS

EJEMPLO 9.º

Supongamos un padre de familia que tiene dos hijos, uno de los cuales está trabajando, por lo que todas las semanas le dá al padre una cierta cantidad de dinero, dependiendo su cuantía de las necesidades que él mismo tenga, incluso alguna semana ha de pedir dinero a su padre porque ha de pagar alguna letra del piso que ha comprado. El segundo hijo pide dinero cada dos días, más o menos según los días de que se trate, incluso algún día ha recibido un premio en el colegio por lo que le dá el dinero al padre para que se lo administre.

El padre, cada día de un cierto mes, apunta la pérdida o la ganancia que le reportan sus hijos por separado, y, al mismo tiempo, apunta lo que cada día gana o pierde en total.

Esta situación la podemos representar con funciones escalonadas. Supongamos que la gráfica de color verde representa por día lo que el primer hijo dá o pide al padre, y la de color negro, lo que pide o entrega el segundo hijo (si el primer hijo le dá al padre 1.400 pesetas en la primera semana, el padre apunta 200 pesetas cada día; análogamente para el 2.º hijo). La gráfica de color rojo representa lo que el padre gana o pierde en total.



(Es aconsejable que, a medida que se van construyendo las gráficas, se vayan explicando con todo detalle, sobre todo al efectuar la suma de las dos funciones escalonadas, haciendo hincapié en que lo que hacemos es sumar punto a punto, es decir:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

En fin, en esta parte el papel del profesor es fundamental.)

Como puede verse, las gráficas anteriores pueden decirle al padre, en cualquier día del mes, lo que le dan o piden sus hijos; la gráfica roja le dice lo que él ahorra o gasta por causa de sus hijos, también le dice cuándo ahorra y cuándo gasta, y, lo que es más importante, puede calcular el saldo en cualquier día del mes, o a final de mes; pero este problema, aunque es sencillo, lo dejaremos para más adelante.

Ejercicio 2

Dadas las funciones definidas por los dos cuadros (tablas):

$f_1(x) = 0$	, ,	si $x < 1$	$f_2(x) = 0$	, ,	si $x < -2$
$f_1(x) = 1$	, ,	si $1 \leqslant x < 3$	$f_2(x) = -3$	, ,	si $-2 \leqslant x < 0$
$f_1(x) = -2$	, ,	si $3 \leqslant x < 4$	$f_2(x) = 1$	, ,	si $0 \leqslant x < 2$
$f_1(x) = 3$	, ,	si $4 \leqslant x < 6$	$f_2(x) = 2$	, ,	si $2 \leqslant x < 5$
$f_1(x) = 0$	, ,	si $6 \leqslant x$	$f_2(x) = 0$	, ,	si $5 \leqslant x$

1.º Representarlas gráficamente (con distinto color) en los mismos ejes.

2.º Efectuar su suma gráficamente representándola con otro color.

3.º Completar la tabla siguiente, que es la correspondiente a la función suma de las dos funciones dadas:

$$\begin{array}{llll} f(x) = & 0 & \text{si} & x < -2 \\ f(x) = & -3 & \text{si} & -2 \leqslant x < 0 \\ f(x) = & 1 & \text{si} & 0 \leqslant x < 1 \\ f(x) = & 2 & \text{si} & 1 \leqslant x < 2 \end{array}$$

. . . .

. . . .

Este ejercicio, así como el ejemplo anterior, nos dice que las funciones escalonadas se pueden sumar, y, al mismo tiempo que la suma de dos funciones escalonadas, es otra función escalonada, que podemos representar por $f = f_1 + f_2$. Esta suma está definida así:

$$\boxed{(f_1 + f_2)(x) = f(x) = f_1(x) + f_2(x)}$$

($f_1 + f_2$ es el nombre que se le puede dar a la función suma de f_1 y de f_2)

(Nivel 5.º Bachillerato.)

Así, pues, si llamamos E al conjunto de las funciones escalonadas, hemos definido una operación entre los elementos de E, que hemos llamado «suma de funciones escalonadas» y que hemos definido como sigue:

$$\forall\, f_1 . f_2 \in E \quad , , \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

esto, en términos vulgares, quiere decir:

«La ordenada de la función suma, $f_1 + f_2$, correspondiente a cualquier abscisa x, es la suma de las ordenadas correspondientes a la misma abscisa, y que vienen dadas por las funciones sumandos f_1 y f_2.»

Ejercicio 3

Ya se ha comprobado que la suma de dos funciones escalonadas cualesquiera es otra función escalonada, es decir, que la suma definida en E tiene la propiedad *uniforme*.

Demostrar que esta suma tiene las propiedades:

ASOCIATIVA, CONMUTATIVA, EXISTE ELEMENTO NEUTRO, TODO ELEMENTO TIENE OPUESTO.

Para su demostración se puede suponer que $\forall\, f \in E$ es una aplicación de Q en Q; o, si se quiere, de R en R. Demostraremos aquí la ASOCIATIVA como ejemplo:

Hay que demostrar que

$$(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$$

y para esto hemos de ver que

$$\forall x \in Q : [(f_1 + f_2) + f_3] (x) = [f_1 + (f_2 + f_3)] (x).$$

(repetimos que $(f_1 + f_2) + f_3$ es un símbolo que representa una aplicación), pues para que dos aplicaciones sean iguales es preciso que la imagen de cada una, correspondiente a cualquier abscisa, sean la misma y basta que ocurra esto para que las dos aplicaciones sean iguales.

Según la def. de suma:

$$[(f_1 + f_2) + f_3] (x) = (f_1 + f_2) (x) + f_3 (x) = [(f_1(x) + f_2(x)] + f_3(x) =$$
$$\underset{\text{Asoc. en } Q}{=\!=\!=\!=} f_1(x) + [f_2(x) + f_3(x)] = f_1(x) + (f_2 + f_3) (x) = [f_1 + (f_2 + f_3)[(x)$$

Luego

$$(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$$

Como se ve, la demostración se apoya fundamentalmente en la definición de suma en E y en la propiedad asociativa en Q.

Por este mismo camino se demuestran con facilidad el resto de las propiedades.

Se tiene, pues, que E tiene estructura de grupo abeliano, con esta suma que hemos definido.

PRODUCTO DE UNA FUNCION ESCALONADA POR UN NUMERO

EJEMPLO 10

Imaginemos un obrero que trabaja de una manera irregular, es decir, que cada día hace un trabajo remunerado de diferente manera, e incluso algún día pierde dinero porque no encuentra trabajo, por lo que queda en déficit. Esta situación está representada en la gráfica de color negro.

Sin embargo, el obrero está sindicado, por lo que los

$$\frac{2}{5}$$

de lo que gane ha de darlo al sindicato; por otra parte, el sindicato se compromete a entregarle a él los

$$\frac{2}{5}$$

de lo que pierda.

Se desea representar lo que el obrero entrega o recibe cada día del sindicato. Si cuando ha de entregar dinero lo representamos por debajo del eje x y cuando lo recibe, por encima, resulta la gráfica de color rojo, obtenida a partir de la primera, multiplicando cada una de sus ordenadas por

$$-\frac{2}{5},$$

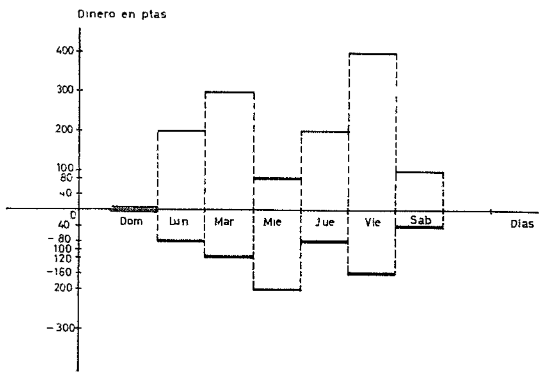
ya que si, por ejemplo, gana con su trabajo un día 200 pesetas, ha de entregar al sindicato

$$\frac{2}{5}\cdot 200 = 80 \text{ ptas.},$$

lo cual le supone a el —80 pesetas; esto sale directamente de

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 200 = -80 \text{ ptas.}$$

$$f : \left\{ \begin{array}{lcr} \text{Domingo} & \longrightarrow & 0 \text{ ptas.} \\ \text{Lunes} & \longrightarrow & 200 \text{ ptas.} \\ \text{Martes} & \longrightarrow & 300 \text{ ptas.} \\ \text{Miércoles} & \longrightarrow & -200 \text{ ptas.} \\ \text{Jueves} & \longrightarrow & 200 \text{ ptas.} \\ \text{Viernes} & \longrightarrow & 400 \text{ ptas.} \\ \text{Sábado} & \longrightarrow & 100 \text{ ptas.} \end{array} \right.$$



$$-\frac{2}{5}\cdot f \left\{ \begin{array}{lcl} \text{Domingo} & \longrightarrow & -2/5\cdot 0 = 0 \text{ ptas.} \\ \text{Lunes} & \longrightarrow & -2/5\cdot 200 = -80 \text{ ptas.} \\ \text{Martes} & \longrightarrow & -2/5\cdot 300 = -120 \text{ ptas.} \\ \text{Miércoles} & \longrightarrow & -2/5\cdot(-200) = 80 \text{ ptas.} \\ \text{Jueves} & \longrightarrow & -2/5\cdot 200 = -80 \text{ ptas.} \\ \text{Viernes} & \longrightarrow & -2/5\cdot 400 = -160 \text{ ptas.} \\ \text{Sábado} & \longrightarrow & -2/5\cdot 100 = -40 \text{ ptas.} \end{array} \right.$$

Este ejemplo nos ayuda a comprender el significado de multiplicar una función escalonada por un número racional; en nuestro caso podemos representar a la 2.ª función por

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot f,$$

siendo f la función de partida. También aquí

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot f$$

es sólo un símbolo o nombre para designar a la función obtenida a partir de la f.

Vamos a generalizar este concepto:

Sea $f : Q \longrightarrow Q$ una función escalonada cualquiera y sea $a \in Q$ un número racional cualquiera; definimos una nueva función escalonada $a \cdot f$ de la siguiente forma:

$$\boxed{(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)}$$

es decir, la imagen por la función $a \cdot f$ de cualquier abscisa x es el producto de a por el número $f(x)$ (imagen de x por f).

Ejercicio 4

Dada la función f siguiente, multiplicarla por $\frac{7}{4}$:

$$\begin{array}{lrlr}
f(x) = & 0 & \text{si} & x < -2 \\
f(x) = & 2 & \text{si} & -2 \leqslant x < 0 \\
f(x) = & -4 & \text{si} & 0 \leqslant x < 3 \\
f(x) = & 4 & \text{si} & 3 \leqslant x < 5 \\
f(x) = & 2 & \text{si} & 5 \leqslant x < 8 \\
f(x) = & 0 & \text{si} & 8 \leqslant x
\end{array}$$

Ejercicio 5

Demostrar las propiedades siguientes:

— ASOCIATIVA: $\forall a, b \in Q, \forall f \in E$, se cumple: $a \cdot (b \cdot f) = (a \cdot b) \cdot f$.

— DISTRIBUTIVA respecto de la función: $\forall a \in Q, \forall f_1, f_2 \in E : a \cdot (f_1 + f_2) = a \cdot f_1 + a \cdot f_2$.

— DISTRIBUTIVA respecto del número: $\forall a, b \in Q, \forall f \in E : (a + b) f = a \cdot f + b \cdot f$.

— EXISTE ELEMENTO UNIDAD: $\exists\, 1 \in Q \mid \forall f \in E \quad 1 . f = f$.

Vamos a demostrar aquí la segunda, como ejemplo:
Igual que en la suma, para ver que

$$a(f_1 + f_2) = a\,f_1 + a\,f_2$$

veremos que

$$\forall x \in Q : [a(f_1 + f_2)]\,(x) = (a\,f_1 + a\,f_2)\,(x)\ ;$$

en efecto:

$$[a(f_1 + f_2)]\,(x) \underset{\text{Def}}{=} a \cdot [(f_1 + f_2)\,(x)] \underset{\text{Def}}{=} a \cdot [f_1(x) + f_2(x)] \underset{\text{Distr. en Q}}{=\!=\!=}$$

$$= a \cdot (f_1(x)) + a \cdot (f_2(x)) \underset{\text{Def}}{=} (a \cdot f_1)\,(x) + (a\,f_2)\,(x) \underset{\text{Def}}{=} [a\,f_1 + a\,f_2[\,(x)$$

como queríamos demostrar.

Como podemos observar, la demostración se basa en la definición de suma de funciones, en la de producto por un número y en la propiedad distributiva en Q.

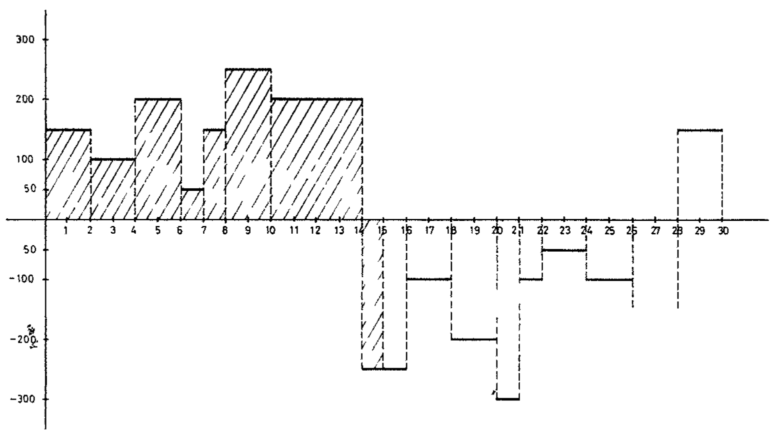
Por este mismo procedimiento se demuestra el resto de las propiedades.

> Con esto queda demostrado que E tiene estructura de ESPACIO VECTORIAL SOBRE Q (o sobre R, según el caso).

AREA ENCERRADA POR UNA FUNCION ESCALONADA

Como ya apuntamos en el ejemplo 9, es muy posible que el padre de los dos chicos desee conocer, en un determinado día del mes, cuál es el saldo total que tiene en ese momento.

Repitamos la gráfica de color rojo del citado ejemplo:



Así, pues, si desea conocer el saldo que tiene el día 15, por ejemplo, todo lo que tiene que hacer es sumar el dinero que corresponde a cada día (con el signo correspondiente), es decir:

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Cantidad	150	+150	+100	+100	+200	+200	+50	+150	+250	+250	+200	+200	+200	+200	—250	= 2.150 pts

Pero se puede hacer de otra manera menos molesta en otros casos: fijémosnos que la cantidad correspondiente a un día, representa el área del rectángulo que tiene por base 1 (1 día) y altura, 100, 250, etc. (cantidad correspondiente a ese día), de tal forma que la cantidad total representa el área encerrada entre la función escalonada, el eje horizontal (eje x) y las ordenadas correspondientes a los extremos de cada «escalón», *teniendo en cuenta* que, por haber ordenadas negativas, las áreas determinadas por estos «escalones» tienen signo negativo, por lo que han de restarse al área positiva de los «escalones» positivos (en nuestro caso, es área negativa la correspondiente al día 15).

Así, pues, si hay que calcular el área que encierra la función escalonada, como siempre se formaran rectángulos, será fácil calcular el área total, ya que muchos de estos rectángulos tendrían la misma base, por lo que saldría factor común en la suma de las áreas. En nuestro caso el área es (teniendo en cuenta que algunos rectángulos tienen la misma base):

$$S = \underset{\text{(base)}}{2} \times \underset{\text{(alturas)}}{(150 + 100 + 200 + 250)} + 1 \times (50 + 150 - 250) +$$

$$+ 4 \times 200 = 2 \times 700 - 50 + 800 = \underline{\underline{2.150 \text{ ptas.}}}$$

Ejercicio: Calcular el saldo total en todo el mes.

No siempre convendra restar estas áreas, sino que nos podemos ver en la necesidad de calcular el área encerrada por una función escalonada, pero sumando las áreas de los rectángulos en valor absoluto, es decir, considerándolas todas positivas. En el ejemplo anterior habría que hacerlo así, si nos hubiesen preguntado la cantidad de dinero que ha pasado por las manos del padre; más claro se ve si nos preguntamos por la cantidad de dinero que ha pasado por las manos de cualquiera de sus hijos.

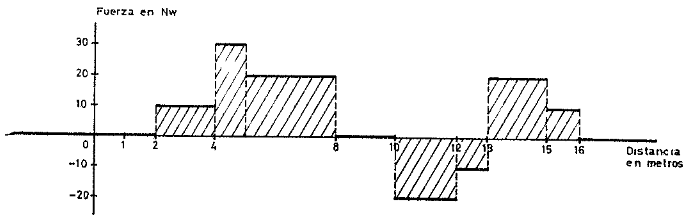
Vamos a hacer un ejemplo, en el que se ve la necesidad de calcular el área de este segundo caso.

EJEMPLO 11

Una fuerza actua variando en intensidad y sentido, pero no en dirección, sobre un camino que mediremos en metros y que tiene la misma dirección de la fuerza en cada momento; formamos la función escalonada: (gráfica adjunta).

Distancia $\xrightarrow{f}$ Fuerza en Nw, que se ejerce a lo largo de esa distancia. Supondremos que cuando la fuerza cambia en intensidad o sentido lo hace de golpe, es decir, no lo hace gradualmente.

Se desea conocer el trabajo que se ha realizado en total.



Como la fuerza y el camino tienen la misma dirección en cada momento, el ángulo que forman siempre es 0º, luego, como el trabajo es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos 0^{\circ} \Longrightarrow W = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| .$$

Según la gráfica, las abscisas son metros y las ordenadas son Nw, por tanto, el trabajo pedido es el área encerrada por la función escalonada, pero como nos piden el trabajo que realiza la fuerza, si restamos el área negativa, nos engañaríamos, es decir, no refleja la realidad (imaginad que se quiere arrastrar un bloque de piedra); tenemos, pues, que sumar las áreas de los rectángulos tomándolas todas positivas:

$$W = 2 \times (10 + 0 + 20 + 20) + 1 \times (30 + 10 + 10) + 3 \times 20 = \\ = 210 \text{ Julios}$$

Como puede imaginarse, la pregunta que se haga en el ejemplo siempre nos dá la pista para ver si hemos de sumar conservando los signos o sumar en valor absoluto. Si el ejemplo no refleja situación de la vida real, siempre se indicará de alguna forma cómo hay que calcular ese área.

Ejercicio 6

Calcular el área que encierra la gráfica de la función definida a continuación, con el eje x y las ordenadas extremas.

Idem, con las ordenadas en $x = 1$ hasta $x = 8$.

(Se recomienda dibujar la gráfica de la función.)

$$\begin{array}{ll|ll}
f(x) = 0 & \text{si } x < 0 & f(x) = 1 & \text{si } 6 \leqslant x < 7 \\
f(x) = -2 & \text{si } 0 \leqslant x < 2 & f(x) = -1 & \text{si } 7 \leqslant x < 9 \\
f(x) = 3 & \text{si } 2 \leqslant x < 5 & f(x) = 0 & \text{si } 9 \leqslant x \\
f(x) = 0 & \text{si } 5 \leqslant x < 6 & &
\end{array}$$

En adelante, y mientras no se diga lo contrario, supondremos que el área que se encuentre por debajo del eje x es negativa.

Una vez visto que en la vida real se necesita calcular estas áreas, vamos a dar una explicación matemática a estos problemas:

FORMA LINEAL SOBRE E

Nos damos cuenta que, dada una función escalonada cualquiera, se le asocia un número racional, que es su área; en Matemáticas, a esta operación se la llama, como sabéis, *correspondencia* Es decir, si E es el espacio vectorial sobre $\underset{\sim}{Q}$ de las funciones escalonadas, siendo $\underset{\sim}{Q}$ el cuerpo de los números racionales, tenemos establecida la correspondencia:

$$E \xrightarrow{\quad A \quad} \underset{\sim}{Q}$$
$$f \longrightarrow \mathrm{A}(f) = \text{área que encierra } f$$

Vamos a estudiar esta correspondencia.

— A ES APLICACIÓN

1) Toda $f \in E$ tiene imagen, pues se puede calcular su área.
2) Dada $f \in E$, su imagen es única, ya que $\mathrm{A}(f)$ se obtiene sumando las áreas de varios rectángulos, y cada uno de éstos tiene un área única.

A ES APLICACIÓN LINEAL

Para esto hemos de probar dos cosas:

1) $\forall\, f, g \in E \;\; , , \;\; \mathrm{A}(f + g) = \mathrm{A}(f) + \mathrm{A}(g)$.
2) $\forall\, f \in E \;\; , , \;\; \forall\, m \in \underset{\sim}{Q} \;\; , , \;\; \mathrm{A}(m \,.\, f) = m \,.\, \mathrm{A}(f)$.

(A nivel de 3.º de Bachillerato, estas demostraciones son prácticamente imposibles por su dificultad, pues incluso el concepto de aplicación lineal es bastante difícil de comprender a esa edad; se puede, sin embargo, comprobar las dos propiedades:

1. Haciendo despacio la construcción de la función suma, y al mismo tiempo ir viendo lo que le ocurre al área, puede quedar fácil la comprobación, es aconsejable que se utilicen funciones en las que sus tramos son todos positivos; al final se les puede preguntar: ¿el área de la suma de dos funciones, es la suma de las áreas de las dos funciones?

2. Se puede comprobar dibujando y con las siguientes preguntas: Si multiplicas por 2 una función escalonada, ¿qué les ocurre a sus respectivas áreas? ¿Y en la multiplicación por 5?¿Y si la multiplicamos por $\dfrac{1}{3}$? También conviene aquí utilizar funciones positivas.

A nivel de 5.º ó 6.º, la demostración de 1) sigue siendo bastante difícil, pero se puede hacer tomando una situación intermedia, es decir, hacerlo por escrito en general, pero, al mismo tiempo, en una gráfica, ver lo que sucede Así lo haremos inmediatamente.

La demostración de 2) no ofrece dificultad.)

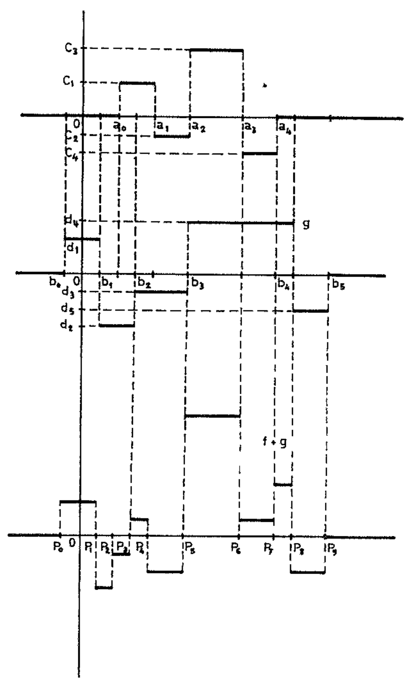
Demostración de que

$$A(f + g) = A(f) + A(g)$$

Supongamos que f y g están definidas de la siguiente forma:

$f(x) = 0$, si $x < a_0$	$g(x) = 0$, si $x < b_0$
$f(x) = C_1$, si $a_0 \leqslant x < a_1$	$g(x) = d_1$, si $b_0 \leqslant x < b_1$
....	....
....	....
$f(x) = C_n$, si $a_{n-1} \leqslant x < a_n$	$g(x) = d_m$, si $b_{m-1} \leqslant x < b_m$
$f(x) = 0$, si $a_n \leqslant x$	$g(x) = 0$, si $b_m \leqslant x$

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (a_i - a_{i-1}) \quad ,, \quad A(g) = \sum_{j=1}^{m} d_j\,(b_j - b_{j-1}) \text{ (ver Fig.)}$$



A lo largo de los ejemplos vistos, al igual que en el de al lado, nos damos cuenta que la función $f + g$ presenta «saltos» en los puntos de salto de f y de g, es decir, en $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$. Tomemos el conjunto $\{ a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \}$ y ordenémosle de menor a mayor, y llamemos a los mismos números, pero ya ordenados: $p_0, p_1, \ldots, p_r$, que son los puntos de «salto» de $f + g$.

En la figura resulta:

$$p_0 = b_0 \, , \, p_1 = b_1 \, , \, p_2 = a_0 \, , \, p_3 = b_2 \, , \, p_4 = a_1 \, ,$$
$$p_5 = a_2 = b_3 \, , \, p_6 = a_3 \, , \, p_7 = a_4 \, , \, p_8 = b_4 \, , \, p_9 = b_5 .$$

Recordemos que por definición:

$$\forall x \in Q : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

En las gráficas de f y de g hemos señalado los puntos $p_0, p_1, \ldots, p_r$; no hay más que mirar la figura para darse cuenta que se pueden expresar A(f) y A(g), tomando como bases de los rectángulos los números $p_k - p_{k-1}$, en lugar de $a_i - a_{i-1}$ para f y de $b_j - b_{j-1}$ para g, y tomando como alturas las ordenadas de f y de g, correspondientes a estos intervalos $p_k - p_{k-1}$. Podremos entonces escribir:

$$A(f) = \sum_{k=1}^{r} h_k \cdot (p_k - p_{k-1}) \quad , , \quad A(g) = \sum_{k=1}^{r} h'_k \cdot (p_k - p_{k-1})$$

donde

$$h_k = c_i \quad \text{si} \quad a_{i-1} \leqslant p_k < a_i$$

y

$$h'_k = d_j \quad \text{si} \quad b_{j-1} \leqslant p_k < b_j$$

Con esto, podemos poner:

$$A(f) + A(g) = \sum_{k=1}^{r} (h_k + h'_k) \cdot (p_k - p_{k-1})$$

Ahora bien, como h_k es ordenada de la función f y h'_k es la ordenada en la función g, correspondiente a la misma abscisa que la de h_k, resulta que, por la definición $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, el número $h_k + h'_k$ será la ordenada correspondiente a la misma abscisa que la de h_k y h'_k en la función $f + g$; por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{r} (h_k + h'_k) \cdot (p_k - p_{k-1}) = A(f + g)$$

Luego

$$A(f + g) = A(f) + A(g)$$

Demostración de que A(m f) = m . A(f):

Supongamos que f está definida con la misma tabla que en la demostración anterior; entonces $m \,.\, f$ está definida con la tabla (recordemos que $(m\, f)\,(x) = m \,.\, f(x)$).

$$\begin{array}{l}
(m\, f)\,(x) = 0, \text{ si } x < a_0 \\
(m\, f)\,(x) = m \cdot c_1, \text{ si } a_0 \leqslant x < a_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(m\, f)\,(x) = m \cdot c_n, \text{ si } a_{n-1} \leqslant x < a_n \\
(m\, f)\,(x) = 0, \text{ si } a_n \leqslant x
\end{array}$$

Por tanto:

$$A(m\, f) = \sum_{i=1}^{n} m \cdot c_i \cdot (a_i - a_{i-1}) = m \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (a_i - a_{i-1}) \right)$$

pero como

$$A(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(a_i - a_{i-1})$$

tenemos que

$$A(m\, f) = m \,.\, A(f)$$

Con esto hemos probado que la correspondencia

$$E \xrightarrow{\ \mathrm{A}\ } Q$$

es una aplicación lineal.

A las aplicaciones lineales definidas de un espacio vectorial en su cuerpo base se las suelen llamar FORMAS LINEALES.

Así, pues,

$$E \xrightarrow{\ \mathrm{A}\ } Q$$

es una forma lineal.

(Continuará)

C R O N I C A

Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas, 1973

Acompañando al número anterior, 5-6, de esta Revista se remitió la primera circular referente a estas Jornadas.

Como en ella se indica, se celebrarán en los días del 24 al 28, ambos inclusive, de abril de 1973.

Mientras se remite la segunda circular, se hace presente la conveniencia del envio lo más pronto posible, de los boletines de inscripción, para poder hacer el cálculo aproximado de asistentes, para la adecuada preparación de los actos correspondientes. Caso de no haberse recibido, o necesitar para otras personas, pueden solicitarse circulares, y cuanta información sea precisa, de el Instituto «Jorge Juan».

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

El viernes 24 de noviembre el Dr. Paul Kruger pronunció una conferencia sobre el tema «Nuclear Methods in Environmental Sciences».

El viernes 12 de enero de 1973 celebró sesión pública para escuchar la conferencia del Profesor Dr. Jorge Sahade sobre «Evolución en binarias cerradas».

III Coloquio Internacional de Geometría Diferencial

Como se había anunciado, se celebró en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Santiago de Compostela el referido Coloquio, con la asistencia de numerosos Profesores extranjeros y españoles. Se desarrollaron con gran éxito todos los temas programados.

Societé Mathematique de France

Publica en su circular de información sobre conferencias, seminarios y coloquios, a desarrollar en los distintos establecimientos científicos parisienses, Universidad, Instituto «Henri Poincaré», etc., los actos correspondientes al final de 1972 y principios del 1973.

The Royal Society of Health

Health Congress at Eastbourne se celebrará del 30 de abril al 4 de mayo de 1973.