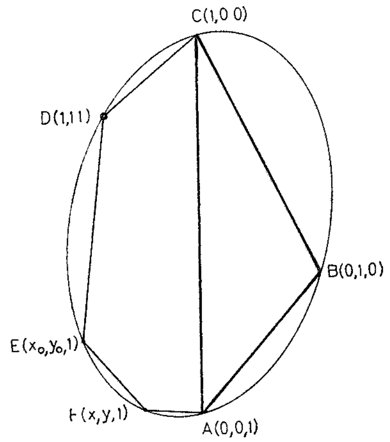
UNA DEMOSTRACION ESTRICTAMENTE ANALITICA DEL TEOREMA DE PASCAL Y SU RECIPROCO

por

JESUS GOMEZ SANCHEZ

Sea el exágono ABCDEF inscrito en una cónica cualquiera, incluso degenerada. Vamos a tomar un sistema de coordenadas proyectivas, de tal modo que cuatro de los vértices del exágono sean los vértices del triángulo fundamental y punto unidad del sistema de coordenadas proyectivas. Con este procedimiento, por supuesto, no se pierde generalidad alguna, pues el sistema proyectivo se ha elegido ligado a la cónica, una vez dada ésta.



Concretando: Las coordenadas proyectivas homogéneas de los cuatro primeros vértices del exágono son

A (0,0,1) B (0,1,0) C (1,0,0) D (1,1,1).

Por tanto, las ecuaciones de las rectas, mediante las cuales daremos la ecuación de la cónica, son, pues,

$$AB)\ x = 0\ ;\ CD)\ y - z = 0\ ;\ AC)\ y = 0\ ;\ BD)\ x - z = 0$$

La cónica degenerada AB CD tiene, por ello, la ecuación

$$x\,(y - z) = 0$$

y, análogamente, la cónica degenerada AC · BD la

$$(x - z)\,y = 0$$

de donde el haz de cónicas que pasan por los puntos A,B,C.D tiene la ecuación

$$x\,(y - z) - a\,(x - z)\,y = 0 \qquad (a,\ \text{parámetro})$$

y la ecuación no homogénea de ese haz es evidentemente

$$x\,(y - 1) - a\,(x - 1)\,y = 0. \tag{1}$$

El punto E ha de tener unas coordenadas fijas, las cuales denominaremos

$$E\,(x_0,\ y_0,\ 1)$$

que nos permiten determinar el valor del parámetro a para la cónica que pasa por los puntos A,B,C,D,E, desde luego por la ecuación

$$x_0(y_0 - 1) - a\,(x_0 - 1)\,y_0 = 0$$

Así, pues, una vez sustituido el valor de a en la ecuación [1], la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos A,B,C,D,E adopta la forma

$$\frac{(x - 1)x_0}{(x_0 - 1)x} = \frac{(y - 1)y_0}{(y_0 - 1)y} \tag{2}$$

A continuación hallamos las coordenadas de los puntos de intersección de los pares de lados opuestos del exágono, teniendo presente que el punto F es uno cualquiera de la cónica, es decir.

$$F(x,\ y,\ 1)$$

son sus coordenadas, que verifican ecuación [2].

Los tres pares de lados opuestos se cortan en los puntos respectivos

$$\left.\begin{matrix} AB \\ DE \end{matrix}\right\} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;\quad \begin{vmatrix} 0 & y & z \\ x_0 & y_0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = 0$$

$$-(x_0 - 1)\,y + (x_0 - y_0)\,z = 0 \qquad (0\ ;\ x_0 - y_0\ ;\ x_0 - 1)$$
$$x = 0$$

$$\begin{matrix} \text{BC} \\ \text{EF} \end{matrix}\Bigg\} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ 0)$$

$$z = 0 \qquad\qquad z = 0$$

$$\begin{matrix} \text{CD} \\ \text{FA} \end{matrix}\Bigg\} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \begin{vmatrix} x & y \\ & \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1,\ y_1,\ y_1)$$

$$y - z = 0 \qquad\qquad y - z = 0$$

Ahora examinemos si los tres puntos de intersección obtenidos están alineados. Lo cual depende de la anulación del determinante de sus coordenadas, donde pondremos x,y,y en vez de x_1,y_1,y_1. por sencillez de notación

$$\begin{vmatrix} x & y & y \\ 0 & x_0 - y_0 & x_0 - 1 \\ x_0 - x & y_0 - y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 1 - y_0 & x_0 - 1 \\ x_0 - x & y_0 - y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_0 - x)\,(y_0 - 1)\,y - (y_0 - y)\,(x_0 - 1)\,x$$

La anulación de este determinante equivale, obviamente, a la relación

$$\frac{x - x_0}{(x_0 - 1)x} = \frac{y - y_0}{(y_0 - 1)y} \qquad [3]$$

Como el punto F(x, y, 1) pertenece a la cónica [2], verifica su ecuación

$$\frac{(x - 1)x_0}{(x_0 - 1)x} = \frac{(y - 1)y_0}{(y_0 - 1)y} \qquad [4]$$

pero estas dos ecuaciones son claramente equivalentes, en virtud de las propiedades elementales de las proporciones.

Finalmente, concluimos que se verifica el teorema de Pascal:

Si los vértices de un exágono yacen en una cónica (se verifica [2]), los pares de lados opuestos se cortan, respectivamente, en tres puntos alineados (se tiene [3]).

Inversamente: Si los pares de lados opuestos de un exágono se cortan en tres puntos alineados (se verifica [3]), el exágono está inscrito en una cónica (se da [2]).

Observación.—Cuando el punto E tiene nula la coordenada 3.ª, es pues E(x_0, y_0, o), entonces pertenece a la recta BC. Para hallar el valor de a se requiere la ecuación homogénea del haz, obteniendo ahora

$$x_0 (y_0 - 0) - a (x_0 - 0) y_0 = 0$$

o bien

$$(a - 1)x_0 y_0 = 0$$

dando lugar a alguna de las posibilidades

$$a = 1 \; ; x_0 = 0 \; ; y_0 = 0$$

En la primera, la cónica es degenerada y su ecuación

$$(x - y)z = 0$$

desdoblada en las rectas AD y BC; en los otros dos casos, significa que el punto E ha coincidido con B o C, y en estos dos últimos la cónica es indeterminada, por los puntos A.B.C.D.E. El primer caso satisface los teoremas enunciados y las fórmulas tienen una expresión más sencilla.

Aplicaciones a los pentágonos, cuadrángulos y triángulos inscritos.

El teorema de Pascal permanece válido, cuando algunos de los puntos del exágono inscrito han llegado a coincidir, con lo cual se referirá a los pentágonos, cuadrángulos o triángulos inscritos, según fuera el número de puntos coincidentes, tomando en esas circunstancias, como rectas que pasan por dos puntos coincidentes, la tangente a la cónica en dicho punto.

Estos casos particulares se desprenden del general, mediante la aplicación del Principio de Continuidad, como es bien sabido. Empero, consecuentes con el título de esta exposición, proseguimos por vía analítica.

Cuando el punto F ha coincidido con el A, entonces F(0,0,1) y las intersecciones de AB y DE, de BC y EF son ahora

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{AB} \\ \mathrm{DE} \end{matrix}\right\} (0, x_0 - y_0, x_0 - 1) \qquad \left.\begin{matrix} \mathrm{BC} \\ \mathrm{EF} \end{matrix}\right\} (x_0, y_0, 0)$$

La intersección de CD y la tangente en A a la cónica es

$$\left.\begin{matrix} y - z = 0 \\ x - py = 0 \end{matrix}\right\} (p,1,1)$$

donde

$$p = a,$$

si la recta es tangente; siendo $x - py = 0$ una recta genérica que pasa por punto A (p, parámetro). Averigüemos cuándo los tres puntos obtenidos son alineados. Esto nos lo dirá el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 0 & x_0 - y_0 & x_0 - 1 \\ x_0 & y_0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 0 & 1 \\ 0 & 1 - y_0 & x_0 - 1 \\ x_0 & y_0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x_0(y_0 - 1) - p(x_0 - 1)y_0$$

pero como $p = a$ y el punto $(x_0, y_0, 1)$ es un punto de la cónica [1]

$$x_0(y_0 - 1) - a(x_0 - 1)y_0 = 0,$$

por tanto los tres puntos están alineados. A la inversa, si los puntos donde se cortan dos pares de lados opuestos del pentágono y el punto de corte del quinto lado y una recta *cualquiera* pasando por A, están alineados, se verifica

$$x_0(y_0 - 1) - p(x_0 - 1)y_0 = 0$$

de donde

$$p = \frac{x_0\,(y_0 - 1)}{(x_0 - 1)\,y_0} = a$$

y la recta $x - py = 0$ es, pues, $x - ay = 0$, que es la tangente en A.

En el cuadrilátero ABCD las intersecciones de los lados AB y CD y de BC y DA son

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{AB} \\ \mathrm{CD} \end{matrix}\right\} (0,1,1) \qquad \left.\begin{matrix} \mathrm{BC} \\ \mathrm{DA} \end{matrix}\right\} (1,1,0)$$

La tangente a la cónica [1] en el punto C(1,0,0) es

$$y = 1/(1 - a)$$

la intersección de ésta con la tangente en A a la cónica es

$$\left.\begin{matrix} x - py = 0 \\ y = 1/(1 - a) \end{matrix}\right\} (p,1,1 - a)$$

donde

$$p = a$$

Veamos si estos tres puntos están alineados. El determinante

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & a & 1-a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p - a = 0$$

así pues, los puntos están alineados. Viceversa, si $x - py = 0$ es una recta cualquiera pasando por A, tal que corte a la tangente en C a la cónica en un punto alineado con los otros dos, por la alineación se tendrá $p - a = 0$, por ello la recta es $x - ay = 0$, es decir, la tangente en A.

En el triángulo ABC las intersecciones de las tangentes a la cónica en los puntos A, B, C con los lados opuestos, respectivos, del triángulo

$$\left.\begin{array}{r} x - py = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} (p,1,0) \text{ (aquí } p = a)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = a/(a - 1) \\ y = 0 \end{array}\right\} (a,0,a-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 1/(1 - a) \\ x = 0 \end{array}\right\} (0,1,1-a)$$

La alineación de los puntos vendrá dada por el determinante

$$\begin{vmatrix} p & 1 & 0 \\ a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 1-a \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} p & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - a)(p - a) = 0.$$

Inversamente, si la recta $x - py = 0$ se sabe que corta a la tangente en C en un punto alineado con los otros dos, entonces

$$(1 - a)(p - a) = 0,$$

de donde

$$p = a \text{ (a menos que } a = 1)$$

y la recta así elegida es, sin duda, la tangente en A a la cónica.

Cuando $a = 1$ el último determinante es idénticamente nulo, cualquiera que sea el valor de p. Lo cual significa que la cónica ha degenerado en dos rectas $(x - y)z = 0$, las tangentes en B y C han coincidido en $z = 0$.