TEOREMA RELATIVO A LA BIYECCION ENTRE EL CONJUNTO DE NUMEROS REALES Y EL CONJUNTO DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA

por

V. Zorio B.

Nota: Este teorema se demuestra teniendo en cuenta que «el número real es una clase de sucesiones de Cauchy de números racionales respecto de la relación de equivalencia $a_n - b_n \to o$». En la moderna construcción del número real no se consideran tan solo sucesiones monótonas convergentes de números racionales como era clásico. Por ello la demostración se complica.

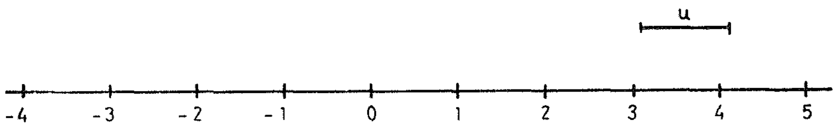
Teorema.—Existe una biyección entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de una recta.

El teorema anterior quiere decir que a cada punto corresponde un número real único, y recíprocamente, a cada número real corresponde un punto único.

Para la demostración de este teorema necesitamos hacer uso de los dos postulados que vamos a enunciar a continuación.

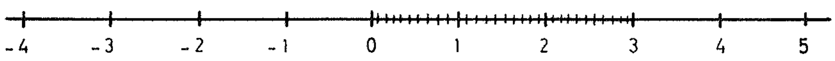
Postulado de Arquímedes.

Supongamos que sobre la recta hemos marcado un punto origen O. Con una unidad arbitraria u podemos graduar la recta llevando segmentos iguales a u y en posición consecutiva a derecha e izquierda



El conjunto de puntos 1, 2, ... —1, —2, ... es llamado *primera graduación* de la recta.

Cada uno de los segmentos anteriores puede dividirse en diez segmentos más pequeños. Los puntos de la primera graduación, añadidos a estos nuevos puntos, constituyen la *segunda graduación*



De analoga forma obtendríamos la *tercera graduación*, etc.

Cada graduación contiene los puntos de la anterior y otros nuevos; luego si un punto pertenece a la graduación n, pertenecerá también a la $n+1$, $n+2$, ..., etc.

El postulado de Arquímedes dice:

«Dado un punto de una recta, o pertenece a la graduación enésima o está comprendido entre dos puntos de la misma.»

Esto vale, naturalmente, para cualquier n.

Postulado de Dedekind o de continuidad de la recta.

Dado un conjunto de segmentos $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ... $A_nA'_n$ .... formando sucesión, se dice que están *encajados* si se verifica:

a) $A_1A'_1 \supset A_2A'_2 \supset \ldots \supset A_nA'_n \supset \ldots$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} | A_n A'_n | = o.$

O sea, en la recta estarán situadas en la forma siguiente:

El Postulado de Dedekind dice:

«La intersección de todos los segmentos de una sucesión de segmentos encajados es un punto único.» O sea,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i A'_i = \text{P (punto único)}$$

Demostración del teorema.

Dada una recta y fijado un origen O y una unidad u, podemos representar en la recta, sin ambiguedad, cualquier número racional utilizando tan solo el cartabón, la escuadra y el compás. Los únicos conocimientos geométricos que se requieren es el Teorema de Thales.

A todo punto de la recta corresponde un número real. Veamos:

I. Dado un punto cualquiera de la recta puede ocurrir:

1. El punto P pertenece a una graduación, en cuyo caso es la imagen de un número racional. Por ejemplo, supongamos que P pertenezca a la segunda graduación. Ver la figura

P sería la imagen del numero racional 2,6.

Si P perteneciese a la graduación mil, sería la imagen de un número racional con novecientas noventa y nueve cifras decimales perfectamente definidas.

2 Puede ocurrir que P no pertenezca a ninguna graduación, en cuyo caso, por el postulado de Arquímedes, estará comprendido entre, dos puntos de la primera graduación, entre dos puntos de la segunda etcétera. O sea

P comprendido entre los puntos $A_1A'_1$ de la 1.ª graduación.

P comprendido entre los puntos $A_2A'_2$ de la 2.ª graduación.

. . . .

P comprendido entre los puntos $A_nA'_n$ de la n.ª graduación.

. . . .

El punto P pertenece a todos los segmentos

$$A_1A'_1,\ A_2A'_2,\ \ldots\ldots\ A_nA'_n\ \ldots$$

Estos segmentos están encajados, luego, por el postulado de Dedekind, determinan un punto único que ha de ser el P.

Los puntos $A_1\ A_2\ \ldots\ A_n\ \ldots$, pertenecientes a las graduaciones primera, segunda, ... enésima, corresponden a números racionales como vinos en 1. O sea

A_1 imagen del n.º racional a_1

A_2 imagen del n.º racional a_2

. . . .

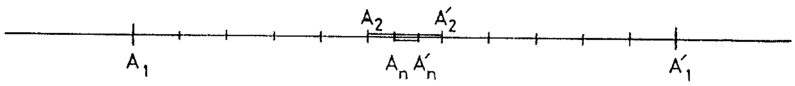
A_n imagen del n.º racional a_n

. . . .

Los puntos A'_1 A'_2 ... A'_n ...., pertenecientes a las graduaciones primera, segunda, ..., enésima, corresponden a números racionales, como vimos en 1. Es decir,

A'_1 imagen del n.º racional a'_1
A'_2 imagen del n.º racional a'_2
....
A'_n imagen del n.º racional a'_n
....

Gráficamente



La sucesión a_1 a_2 ... a_n .... es creciente y la sucesión a'_1 a'_2 .... a'_n ... es decreciente.

Tenemos que demostrar que ambas son sucesiones de Cauchy.

Sabemos que

$$| A_n A'_n | = \frac{1}{10^{n-1}},$$

y que dentro del segmento A_n A'_n están contenidos todos los términos de (a_n) de subíndice mayor que n. o sea

$$| a_{n'} - a_{n''} | < \frac{1}{10^{n-1}} \text{ para } n', n'' > n$$

Así, pues, si fijamos ε determinamos inmediatamente n haciendo

$$\varepsilon = \frac{1}{10^{n-1}} \Rightarrow 10^{n-1} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 = \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow n = \underbrace{\left[\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1\right]}_{\text{parte entera}}$$

tal que se verifica

$$| a_{n'} - a_{n''} | < \varepsilon$$

para

$$n', n'' > n = \left[\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1\right]$$

luego (a_n) es sucesión de Cauchy *c.q.d.*

Con un razonamiento exactamente igual, obtendríamos que (a'_n) es sucesión de Cauchy.

Vamos a demostrar que (a_n) y (a'_n) determinan el mismo número real. En efecto

$$a'_n - a_n = | A_n A'_n | = \frac{1}{10^{n-1}}$$

que tiene por límite cero para $n \to \infty$, luego $a'_n - a_n$ es suc. nula.

Por tanto representan el mismo número real, o sea

$$\{ (a_n) \} = \{ (a'_n) \}$$

Fijado P en la recta, hemos determinado, sin ambiguedad, un número real $\{ (a_n) \} = \{ (a'_n) \}$.

Luego si tanto el punto pertenece, como si no pertenece a ninguna graduación (casos 1 y 2), hemos asignado al punto unívocamente un número real (que era racional en el caso 1).

A todo número real corresponde un punto único en la recta. Veamos:

II. Dado un número real cualquiera, vamos a demostrar que le pertenece un punto único en la recta.

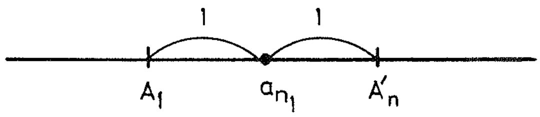
Sea el número real $\{ (a_n) \}$, es decir, el que determina la sucesión de Cauchy (a_n).

Como (a_n) es de Cauchy, resulta que para cada ε obtendremos un $n(\varepsilon)$, tal que $| a_{n(\varepsilon)} - a'_n | < \varepsilon$ para $n' > n(\varepsilon)$.

Así, para·

$$\varepsilon = 1 \quad n(1) = n_1 \text{ tal que } a_{n'} \in E_1(a_{n_1}) \text{ para } n' > n_1 = n(1)$$

$$E_1(a_{n_1}) = A_1A'_1$$



$$\varepsilon = \frac{1}{10} \; ; \; n\left(\frac{1}{10}\right)$$

tal que

$$a_{n'} \in E_{1/10} \left(a_{n(1/10)}\right) \text{ para } n' > n\left(\frac{1}{10}\right)$$

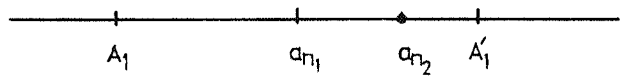
Sea

$$n_2 = \text{máx.} \left(n_1, n\left(\frac{1}{10}\right)\right) \Rightarrow$$

(n_1 es el que hemos determinado anteriormente)

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) \quad n_2 \geqslant n\left(\dfrac{1}{10}\right) \Rightarrow a_{n_2} \in E_{1/10}\left(a_{n(1/10)}\right) \\ 2) \quad n_2 \geqslant n_1 \Rightarrow a_{n_2} \in E_1(a_{n_1}) = \overline{A_1A'_1} \end{cases}$$

la posición de a_{n_2} será entonces:



por 2)

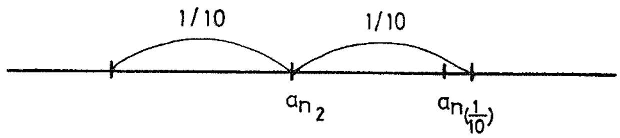
pero por 1)

$$a_{n_2} \in E_{1/10}\,(a_{n(1/10)}),$$

resultará que

$$a_{n(1/10)}$$

estará dentro del entorno siguiente



Si $n' > n_2$ será por 1)

$$n' > n_2 \geqslant n\left(\frac{1}{10}\right)$$

luego

$$a_{n'} \in E_{1/10}\,(a_{n(1/10)})$$

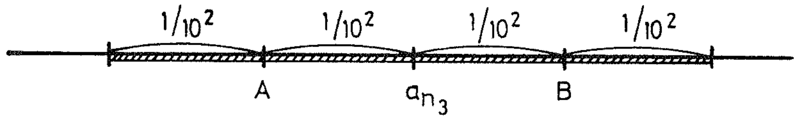
pero como hemos visto que

$$a_{n(1/10)}$$

pertenece al entorno de centro a_{n_2} y de radio $\dfrac{1}{10}$

resultará que $a_{n'}$ para $n' > n_2$ estará dentro del entorno

$$E_{2/10}\,(a_{n_2}):$$



pues las posiciones extremas que puede ocupar

$$a_{n(1/10)}$$

serán los puntos A y B, luego

$$a_{n'} \in E_{2/10}(a_{n_2}) \text{ para } n' > n_2$$

Por ser $n' > n_2 \geqslant n_1$ será también $a_{n'} \in E_1(a_{n_1}) = \overline{A_1A'_1}$

Resumiendo:

Para

$$n' > n_2 = \text{máx}\left(n_1,\, n\left(\frac{1}{10}\right)\right)$$

se verificara

$$a_{n'} \in A_1A'_1 \cap E_{2/10}(a_{n_2}).$$

Llamaremos

$$\overline{A_2A'_2} \subset \overline{A_1A'_1} \cap E_{2/10}(a_{n_2})$$

y está claro que

$$\overline{A_2A'_2} \cap \overline{A_1A'_1}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10^2} \quad ; \quad n\left(\frac{1}{10^2}\right)$$

tal que

$$a_{n'} \in E_{1/10^2}(a_{n(1/10^2)})$$

para

$$n' > n\left(\frac{1}{10^2}\right)$$

Sea

$$n_3 = \text{máx}\left(n_2,\, n\left(\frac{1}{10^2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) \quad n_3 \geqslant n\left(\dfrac{1}{10^2}\right) \Rightarrow \mid a_{n(1/10^2)} - a_{n_3} \mid < \dfrac{1}{10^2} \\ 2) \quad n_3 \geqslant n_2 \Rightarrow a_{n_3} \in \overline{A_2A'_2} \end{cases}$$

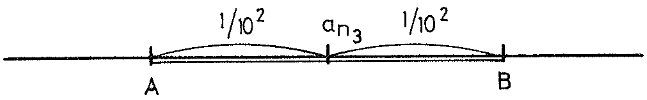
Por 1) resulta que

$$a_{n(1/10^2)}$$

pertenece al entorno de centro a_{n_3} y radio

$$\frac{1}{10^2},$$

ocupando, como máximo, las posiciones extremas A y B:



Si $n' > n_3$ será por 1)

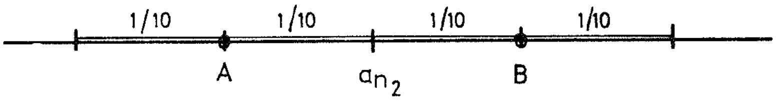
$$n' > n_3 \geqslant n\left(\frac{1}{10^2}\right)$$

y por tanto se verificará

$$a_{n'} \in E_{1/10^2}\,(a_{n(1/10^2)})$$

luego para $n' > n_3$ se verificará que

$$a_{n'} \in E_{2/10^2}\,(a_{n_3})$$



Si $n_3 > n_3$ por 2) será $n' > n_3 \geqslant n_2 \Rightarrow a_{n'} \in \overline{A_2A'_2}$

Resumiendo:

Para

$$n' > n_3 = \text{máx}\left(n_3,\, n\left(\frac{1}{10^2}\right)\right)$$

se verificará

$$a_{n'} \in \overline{A_2A'_2} \cap E_{2/10^2}\,(a_{n_3})$$

Llamaremos

$$\overline{A_3A'_3} = \overline{A_2A'_2} \cap E_{2/10^2}(a_{n_3})$$

y está claro que

$$\overline{A_3A'_3} \subset \overline{A_2A'_2}.$$

El proceso puede seguir indefinidamente, y obtendremos dos sucesiones de números racionales correspondientes a los puntos $A_1 \; A_2 \ldots \ldots A_p \ldots$ y a los puntos $A'_1 \; A'_2 \ldots A'_p \ldots .$

La suc. $A_1 \; A_2 \ldots A_p \ldots .$ es una sucesión monótona creciente, que pertenece a la misma clase que

$$a_{n_1}, \; a_{n_2}, \ldots . \; a_{np} \ldots .$$

pues

$$a_{n_1} - A_1 = 1 \quad ; \quad a_{n_2} - A_2 \leqslant \frac{2}{10} \; \ldots\ldots \; a_{np} - A_p \leqslant \frac{2}{10^{p-1}} \; \ldots .$$

es decir,

$$\lim_{p\to\infty} (a_{np} - A_p) = \leqslant \lim_{p\to\infty} \frac{2}{10^{p-1}} = 0$$

luego $(a_{np} - A_p)$ es sucesión nula.

La suc. $A'_1 \; A'_2 \ldots . \; A'_p \ldots$ es monótona decreciente, y pertenece también a la misma clase que

$$a_{n_1} \; a_{n_2} \ldots . \; a_{np} \ldots .$$

pues

$$A'_1 - a_{n_1} = 1 \; , \; A'_2 - a_{n_2} \leqslant \frac{2}{10} \ldots . . \; A'_p - a_{np} \leqslant \frac{2}{10^{p-1}}$$

o sea

$$\lim_{p\to\infty} (A'_p - a_{np}) = 0 \; ,$$

es decir, es suc. nula.

La sucesión $a_{n_1} \; a_{n_2} \ldots . \; a_{np} \ldots .$, formada por términos de la sucesión (a_n), se dice que es una sucesión parcial de ella. Se demuestra que la sucesión (a_{np}) es también de Cauchy y de la misma clase que (a_n). Para no alargar prescindimos de esta demostración, que *no* es difícil.

Resulta, entonces, que el número real, representado por la sucesión (a_n), es el mismo que representa (a_{np}) o que representa (A_p) o que representa (A'_p), es decir, se puede escribir:

$$\{ (a_n) \} = \{ (a_{np}) \} = \{ (A_p) \} = \{ (A'_p) \}$$

Ahora bien, la sucesión de segmentos

$$\overline{A_1A'_1} \dots \overline{A_nA_n'} \dots$$

está encajada, pues

$$\overline{A_1A'_1} \supset \overline{A_2A'_2} \supset \dots \supset \overline{A_nA'_n} \supset \dots$$

y

$$\lim_{n\to\infty} | \overline{A_nA'_n} | = 0$$

ya que vimos

$$| \overline{A_nA'_n} | \leqslant \frac{2}{10^{n-1}}$$

Por el postulado de Dedekind $\bigcap\limits_i A_iA'_i = A$ punto único.

Este punto A es la imagen geométrica del número real $\{ (a_n) \}$.

Para terminar la demostración es preciso demostrar que no es posible obtener otro punto B, distinto de A, por el procedimiento que hemos seguido.

En efecto, sea $B_1\ B_2 \dots B_p \dots$ una sucesión monótona creciente que pertenzca a la misma clase que la suc. $a_{n_1}\ a_{n_2} \dots a_{np} \dots\dots$ y por tanto a la misma clase que $A_1\ A_2 \dots A^p \dots$

En este caso se verificará $B_1 = A_1 + \varepsilon_1 \dots . B_p = A_p + \varepsilon_p \dots ..$ y tal que

$$\lim_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$$

Sea otra sucesión $\beta_1\ \beta_2 \dots . \beta_p \dots .$ definida así:

$$\beta_1 = A_1 - | \varepsilon_1 | , \dots\dots , \beta_p = A_p - | \varepsilon_p | , \dots\dots$$

de donde se deduce

$$\beta_1 \leqslant B_1 \dots . \beta_p \leqslant B_p \dots ..$$

La suc. (β_p) pertenece a la misma clase que (B_p), pues

$$\lim_{p\to\infty} (B_p - \beta_p) = \lim_{p\to\infty} (\varepsilon_p + | \varepsilon_p |) = 0$$

De un modo totalmente análogo, sea $B'_1, B'_2, \ldots B'_p \ldots$ una suc. monótona decreciente que pertenezca a la misma clase que $a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{np} \ldots$ y por tanto que $A'_1 A'_2 \ldots A'_p \ldots$

Tendremos

$$B'_1 = A'_1 + \varepsilon'_1, B'_2 = A'_2 + \varepsilon'_2, \ldots, B'p = A'p + \varepsilon'p, \ldots$$

tal que

$$\lim_{p \to \infty} \varepsilon'_p = 0$$

Sean

$$\beta'_1 = A'_1 + |\varepsilon'_1|, \ldots, \beta'_p = A'_p + |\varepsilon'_p| \ldots$$

de donde se deduce

$$B'_p \leqslant \beta'_p$$

La suc. de segmentos encajados $\overline{\beta_p \beta'_p}$:

$$\overline{\beta_1\beta'_1} \supset \overline{\beta_2\beta'_2} \supset \ldots \supset \overline{\beta_y\beta'_p} \supset \ldots \quad \text{y tal que} \quad \overline{\beta_p\beta'_p} \to 0$$

por el postulado de Dedekind determina un punto único

$$B = \bigcap_p \overline{\beta_p \beta'_p}$$

Como para todo p se verifica

$$\overline{B_p B'_p} \subset \overline{\beta_p \beta'_b}$$

luego

$$\bigcap_p \overline{B_p B'_p} \subset \bigcap_p \overline{\beta_p \beta'_p} = B$$

luego

$$\bigcap_p \overline{B_p B'_p} = B$$

Por otra parte, por la misma construcción de los puntos β, resulta

$$\overline{A_p A'_p} \subset \overline{\beta_p \beta'_p}$$

Resultará

$$A = \bigcap_p \overline{A_p A'_p} \subset \bigcap_p \overline{\beta_p \beta'_p} = B$$

luego $A = B$ y

por tanto el punto asignado al número real $\{ (a_n) \}$ lo es sin ambigüedad