SÔBRE O EIXO RADICAL DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Por

JAYME MACHADO CARDOSO

O objetivo da presente nota é demonstrar que o eixo radical de duas circunferências não concêntricas é o eixo das homologias não homotéticas que levam uma das curvas na outra, resultado já anunciado em [1].

Há dois casos a considerar.

1. As duas circunferências são tangentes interna ou externamente (ver figura).

Sejam X e X′ os centros das circunferências dadas e m seu eixo radical (tangente comum).

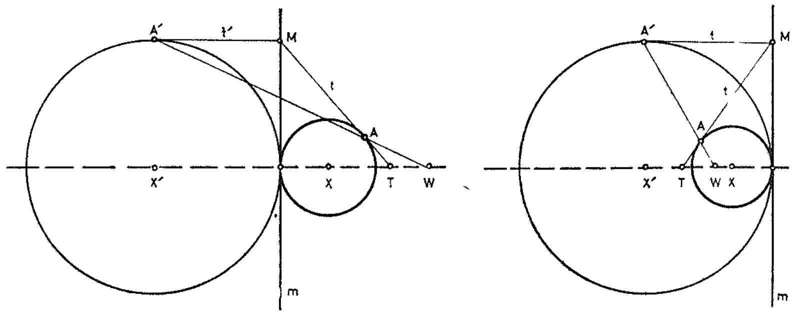
O centro da eventual homologia que transforma uma curva na outra, por questões de simetria, pertence à linha dos centros das circunferências dadas. Tal centro não pode pertencer à tangente comum, pois neste caso a homologia serie homotetia. Então, a tangente comum sendo reta unida que não passa pelo centro é, forçosamente, o eixo da homologia.

Isto posto, seja A′ o ponto de contacto de uma tangente t' à circunferência de centro X′ perpendicular ao eixo radical m. A tangente t' corta m no ponto M. Seja A o ponto de contacto da tangente t à circunferência de centro X conduzida por M, e distinta de m. Então, se existir homologia que transforma a circunferência de centro X na circunferência de centro X′, o ponto A′ será o correspondente do ponto A, e o centro será o ponto W, comum à linha dos centros e à reta AA′. Resta mostrar que, em tal homologia, a correspondente da circunferência de centro X é a circunferência de centro X′.

A tangente t corta a linha dos centros no ponto T, que é ponto da reta limite da homologia. É preciso mostrar que a circunferência de centro X é ortogonal à circunferência da qual os pontos isogonais da homologia são diametrólmente opostos (ver, p. ex. [2], p. 46). Um de tais pontos é o centro W da homologia; o outro é o simétrico de W em relação à reta limite, isto é, o simétrico de W em relação à T. Então, é preciso mostrar que a circunferência com centro em T e raio TW é ortogonal à circunferência como centro em X, ou seja, mostrar que TA = TW. Isto resulta do fato dos triângulos A′MA e TAW serem semelhantes (têm lados paralelos) e do fato de ser A′M = MA (porque M pertence ao eixo radical).

Advertencia.—Por error de imprenta, en el artículo «Homotetias entre duas circunferencias», del Prof. Jayme Machado Cardoso, publicado en el n.º 1-2 (1972) de esta Revista, apareció una tercera figura no correspondiente a dicho artículo, sino a otro del mismo autor, que se publica en el presente número.

Em conclusão, a circunferência de centro X é levada, pela homologia de centro W, em uma circunferência. O centro da circunferência imagem está na reta XW e, como a curva passa pelo ponto A' e pelo ponto comum às duas circunferências dadas, conclui-se que trata-se, efetivamente, da circunferência de centro X' e raio X'A'.



2. As duas circunferências não são tangentes.

Seja, então, m o eixo de uma eventual homologia que transforma uma das curvas na outra. Pelo motivo indicado no caso anterior, m é perpendicular à linha dos centros.

Se m corta uma das curvas em um ponto P, êste ponto é unido e pertence, portanto, à outra curva. Em consequência, se existir homologia o seu eixo coincide com o eixo radical. Aliás, existe tal homologia (na realidade duas homologias), o que pode ser comprovado da mesma maneira que no caso 1.

Suponhamos, então, que m não corta nenhuma das curvas, e seja A' o ponto de contacto de uma tangente t' à circunferência de centro X', sendo t' perpendicular à m. A tangente t' corta m no ponto M. Sejam t e t_1 as tangentes à circunferência de centro X conduzidas do ponto M, e A e A_1 seus respectivos pontos de tangência. Então, se existe homologia que transforma a circunferencia de centro X na circunferência de centro X', o ponto A' será o correspondente de A ou de A_1. Suponhamos, para fixar idéias, que A' é o correspondente de A; em consequência, o centro de uma de tais homologias é o ponto W, comum à reta AA' e à linha dos centros. Resta mostrar que se tal homologia transforma a circunferência de centro X na circunferência de centro X', então a reta m é o eixo radical das curvas em aprêço. Assim, devemos mostrar que MA = MA', suposto que TA = TW, e isto decorre do fato dos triângulos MAA' e TWA serem semelhantes (têm lados paralelos).

REFERÊNCIAS

[1] Cardoso, Jayme M.: On the radical axis of two circles. *Notices Amer. Math. Soc.* v. 16 (1969), p. 576.

[2] Queiroz *et alii: Exercícios de Geometria Descritiva.* Tomo 1, Porto Ed., 1955.